Feuille 7 : Réduction des endomorphismes
Semaines des 26/11 et 03/12

Exercice 1 Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2 Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

Exercice 3 La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

Exercice 4 Soient a un réel et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice A par rapport à la base canonique est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A. Pour quelles valeurs du paramètre a le noyau de f n'est-il pas réduit à $\{0\}$? Justifier.
2. Montrer que le polynôme caractéristique P de f vérifie $P = (X-3)Q$, où Q est un polynôme que l'on déterminera. Pour quelles valeurs de a le nombre 3 est-il racine multiple de P ?
3. Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de f, leurs multiplicités et la dimension des sous espaces propres associés. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 5 Diagonaliser la matrice A suivante et calculer A^n :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 6 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux. Soit u l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2[X] &\xrightarrow{\quad u \quad} \mathbf{R}_2[X] \\ P &\longmapsto (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{aligned}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u et, si c'est possible, diagonaliser u.