Université Rennes 1
UFR Mathématiques

M1 GEDI 2015/2016
Barbara Schapira

Géométrie différentielle. Feuille de TD 6: Variétés

Exercice 1 (Tores de dimension 1) Soit $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore de dimension 1 muni de la topologie quotient et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ la projection canonique.
a) Montrer que $\mathbb{T}^1$ est compact et connexe.
b) Munir $\mathbb{T}^1$ d'une structure de variété différentiable.
c) Vérifier que la projection p est lisse et qu'une application $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ est lisse ssi $f \circ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lisse.
d) Montrer que l'application $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi\theta}$ induit un difféomorphisme entre $\mathbb{T}^1$ et S^1.
e) Proposer une distance sur le tore coincidant localement avec la distance euclidienne.

Exercice 2 (Tores de dimension n) Reprendre les questions ci-dessus avec $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Exercice 3 (Espaces projectifs) Soit $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $P^n(k)$ l'espace projectif de dimension n, i.e.

$$P^n(k) = k^{n+1} - \{0\}/\sim$$

où $x \sim y$ si et seulement si $x \in k^* y$. Autrement dit, l'espace projectif est l'espace des droites de k^{n+1}.

1. Montrer que lorsqu'on le munit de la topologie quotient $P^n(k)$ est un espace topologique compact.
2. Soit
$$\pi \ : \ \begin{cases} k^{n+1} - \{0\} & \to & P^n(k) \\ Z = (z_1, .., z_{(n+1)}) & \mapsto & [z_1, .., z_{(n+1)}] \end{cases}$$
la projection naturelle ; et soit $U_i = \pi(\{Z, z_i \neq 0\})$ et $\phi_i \ : \ U_i \to k^n$ définie par
$$\phi_i([z_1, ..., z_{(n+1)}]) = \left(\frac{z_1}{z_i}, .., \frac{z_{(i-1)}}{z_i}, \frac{z_{(i+1)}}{z_i}, .., \frac{z_{(n+1)}}{z_i}\right).$$
Montrer que $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$ forme un atlas de $P^n(k)$ définissant une structure de variété C^∞.

Exercice 4 (Espaces projectifs, suite) a) Montrer que $P^1(\mathbb{R})$ est difféomorphe à S^1.
b) Montrer que $P^1(\mathbb{C})$ est difféomorphe à $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.
c) Montrer que $P^2(\mathbb{R})$ est difféomorphe au quotient de la sphère S^2 par l'application d'antipodie $v \sim -v$.
d) Montrer que $P^3(\mathbb{R})$ est difféomorphe à $SO(3, \mathbb{R})$.

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on considère la quadrique d'équation $\|x\|^2 - \|y\|^2 = 1$.
a) Montrer que c'est une variété difféomorphe à $S^{n-1} \times \mathbb{R}^p$.
b) Représenter les différents cas quand $n + p = 3$.

Exercice 6 a) Montrer que toute application $A \in GL(n+1, k)$, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, induit par passage au quotient un difféomorphisme de $P^n(k)$. En déduire que $PGL(n+1, k) = GL(n+1, k)/\mathbb{R}^* I$ agit sur $P^n(k)$, par des applications appelées *homographies*.
b) Ecrire explicitement l'action de $PGL(2, \mathbb{R})$ sur S^1 ainsi obtenue.
c) De même écrire l'action de $PGL(2, \mathbb{C})$ sur $P^1(\mathbb{C})$.

Exercice 7 Soit $\mathcal{G}_n^k$ l'ensemble des k-plans dans $\mathbb{R}^n$. Munissez-le d'une structure de variété différentiable lisse. Quelle est sa dimension ? Ces variétés s'appellent les grassmanniennes.

Exercice 8 (Le ruban de Möbius, encore lui) Considérons l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $n.(x, y) = (x + n, (-1)^n y)$. On note $\mathcal{R}$ le ruban de Möbius infini obtenu comme quotient de $\mathbb{R}^2$ par cette action de $\mathbb{Z}$.
a) Munir $\mathcal{R}$ d'une structure de variété différentielle, puis d'une structure de fibré vectoriel au-dessus de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
b) Montrer que ce fibré n'est pas trivial.
c) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x \mod 1, y \cos \pi x, y \sin \pi x)$ passe au quotient en un plongement de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2$.
d) Construire un plongement de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.
e) Une droite affine du plan peut être repérée par une équation d'Euler $x \cos \theta + y \sin \theta = p$. Faites un dessin. A quelle(s) condition(s) (CNS) deux couples (θ, p) et (θ', p') représentent-ils la même droite ? En déduire une bijection entre l'ensemble des droites affines du plan et $\mathcal{R}$.
f) Montrer que $P^2\mathbb{R}$ privé d'un petit disque est difféomorphe à $\mathcal{R}$.

Exercice 9 (La bouteille de Klein) Soit Γ le sous-groupe du groupe des transformations affines de $\mathbb{R}^2$ engendré par les translations de vecteurs de $\mathbb{Z}^2$ et par $(x, y) \mapsto (x + 1/2, -y)$.

1. Montrer que $K = \mathbb{R}^2/\Gamma$ est un espace topologique compact lorsqu'on le munit de la topologie quotient. Essayer de représenter K à partir d'une feuille de papier.

2. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que si $\pi : \mathbb{R}^2 \mapsto K$ est la projection naturelle, alors la restriction de π à $V_{(x_0,y_0)} = \{(x, y) ; |x - x_0| < 1/4, |y - y_0| < 1/2\}$ est un homéomorphisme sur son image $U_{(x_0,y_0)}$, on note $\phi_{(x_0,y_0)}$ l'homéomorphisme réciproque. Montrer que $\{(U_{(x,y)}, \phi_{(x,y)})\}$ forme un atlas définissant une structure de variété C^∞ sur K.

3. Montrer que l'application $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$(x, y) \mapsto ((2 + \cos(2\pi y)) \cos(4\pi x), (2 + \cos(2\pi y)) \sin(4\pi x), \sin(2\pi y) \cos(2\pi x), \sin(2\pi y) \sin(2\pi x))$$

   définit un plongement de K dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10 (Fibration de Hopf) Soit $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ la sphère unité. On identifie $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbb{C}^2$.
a) Montrer que l'intersection d'une droite complexe avec S^3 est une sous-variété de S^3 difféomorphe à un cercle. On pourra considérer l'action sur $\mathbb{C}^2$ des homothéties de rapport $e^{i\theta}$.
b) Montrer que l'application $(z_1, z_2) \in S^3 \to \frac{z_2}{z_1} \in P^1\mathbb{C}$ définit une fibration en cercles de S^3 au dessus de S^2.
Un petit lien pour la route : `http://www.dimensions-math.org/Dim_CH7.htm`
c) Via la projection stéréographique, en déduire une fibration en cercles de S^3 au dessus de S^2.
d) Cette fibration est-elle triviale ?

Exercice 11 Soit $f : X \to Y$ une submersion d'une variété X dans une variété Y.
a) Montrer que $f(X)$ est ouvert dans Y. En déduire que si X compact et Y connexe, f est surjective.
b) Soit Z une sous-variété de Y. Montrer que $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété de X.
c) Si $f : S^3 \to S^2$ est la fibration de Hopf, montrer que l'image réciproque d'un cercle tracé sur S^2 est une sous-variété de S^3 difféomorphe à un tore $S^1 \times S^1$.

Exercice 12 (Eclatement) Soit $E \subset P^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ d'équation $xY - yX = 0$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et $[X, Y] \in P^1(\mathbb{R})$.
a) Vérifier que E est l'ensemble des couples (D, p) avec $p \in D$.
b) Montrer que E est une sous-variété de dimension 2 de $P^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$.
c) Montrer que les projections $E \to \mathbb{R}^2$ et $E \to P^1(\mathbb{R})$ sont lisses.
d) Soit$\pi : E \to \mathbb{R}^2$ la deuxième projection. Montrer que $\pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $P^1(\mathbb{R})$ et que π induit un difféo de $E \setminus \pi^{-1}(0)$ vers $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
e) Soit r l'inverse du difféo ci-dessus. Soit $c : I =]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^2$ une courbe lisse tq $c(t) \neq 0$ pour$t \neq 0$, $c(0) = 0$, $c'(0) \neq 0$. Montrer que $r \circ c : I \setminus \{0\} \to E$ se prolonge de manière unique en $\bar{c} : I \to E$. Montrer

que $\bar{c}$ est lisse.
f) Soit ϕ un difféomorphisme d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\phi(0) = 0$. Montrer qu'il existe un unique difféo $\hat{\phi} : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(U)$ tel que $\pi \circ \hat{\phi} = \phi \circ \pi$.

Exercice 13 (Quaternions) Cet exo ne sera pas corrigé, nous renvoyons aux livres de Perrin, chap 7, et Vidonne *Groupe circulaire, nombres complexes, ...*
a) Montrer qu'il existe une algèbre, notée **H**, de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, munie d'une base notée $1, i, j, k, l$, tq $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, $ij = -ji = k$. On note $q = a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ un élément de **H**.
Si $q = a + bi + cj + dk$, on note $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ son conjugué. **b)** Vérifier que $\bar{q} = q$ ssi $q \in \mathbb{R}$ (i.e. $b = c = d = 0$).
c) On note $N(q) = q\bar{q}$. Vérifier que N est une norme sur **H** (vu comme espace vectoriel).
d) Vérifier que la conjugaison est une isométrie pour cette norme.
On note $\mathbb{R}$ l'espace des quaternions réels, et P celui des quaternions imaginaires purs ($a = 0$).
e) Montrer que $\mathbb{H}$ est un corps, de centre $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$.
f) Vérifier que la norme N est un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{H}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$. On notera G son noyau, i.e. l'ensemble des quaternions de norme 1.

Exercice 14 (S^3 et $SU(2, \mathbb{C})$) Montrer que G s'identifie à la sphère S^3 de $\mathbb{R}^4$.
Montrer qu'il existe un isomorphisme de grp de G dans $SU(2, \mathbb{C})$ qui est aussi un difféomorphisme pour la structure différentiable de G identifié à S^3.

Exercice 15 (Action de G sur $\mathbb{R}^3$) On considère l'action de $\mathbb{H}^*$ sur $\mathbb{H}$ par conjugaison.
a) Pourquoi suffit-il de considérer l'action du sous-groupe G des quaternions de norme 1 ?
b) Notons pour $q \in G$, $S_q : q' \in P \mapsto qq'q^{-1}$. Montrer que S_q est une isométrie pour la norme N.
c) Montrer que S_q peut se restreindre en une isométrie (toujours notée S_q) de P, pour la norme N.
d) L'application S définit ainsi un morphisme de groupe de G dans $O(N_{|P})$. Quel est son noyau ? En identifiant P à $\mathbb{R}^3$, pour les bases canoniques, on identifie ainsi $O(N_{|P})$ à $O(3, \mathbb{R})$.
e) A l'aide de la définition de G, montrer que G est connexe pour la topologie de $\mathbb{H}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4.
f)En déduire que S envoie G dans $SO(3, \mathbb{R})$.
g) Soit $p \in P \cap G$ un imaginaire pur de norme 1. Montrer que S_p fixe p, puis que S_p est un retournement d'axe $< p >$.
i) Déduire des questions précédentes que $S : G/\{\pm 1\} \to SO(3, \mathbb{R})$ est un isomorphisme, et que la projection $G \to SO(3, \mathbb{R})$ est un revêtement.
EN fait, G est le revêtement universel de $SO(3, \mathbb{R})$. En effet, S est un revêtement, et G est topologiquement une sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, donc simplement connexe (et connexe). Cf 2eme semestre.

Exercice 16 a) Montrer que l'application de $SO(3, \mathbb{R})$ dans $P^2(\mathbb{R})$ qui à une rotation associe son axe est une fibration en cercles au dessus de $P^2(\mathbb{R})$.
b) Soit $x_0 \in S^2$. Montrer que l'application de $SO(3, \mathbb{R})$ dans S^2 qui à $g \in SO(3, \mathbb{R})$ associe $g.x_0$ est une fibration en cercles au-dessus de S^2. Quelle est la fibre d'un point $x \in S^2$?
c) Soit T^1S^2 l'ensemble des vecteurs unitaires tangents de S^2. Munir T^1S^2 d'une structure de variété différentiable. Montrer que l'application $T^1S^2 \to S^2$ naturelle est une fibration en cercles.
d) Montrer que T^1S^2 est difféomorphe à $SO(3, \mathbb{R})$.

Exercice 17 Comparer les fibrations $S^3 \to S^2$, $SO(3, \mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$, $SO(3, \mathbb{R}) \to S^2$, $T^1S^2 \to S^2$