Feuille 6 : Déterminants
Semaine du 21/11/2018

Exercice 1 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 10 & 14 & 22 \\ 0 & 21 & 33 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} x & y & x & y \\ 0 & x & y & x \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

Exercice 2 Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + A + I = 0$. Calculer $\det A$. Même question avec $A^2 - A + I = 0$.

Exercice 3 Montrer que si n est impair, il n'existe pas de $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + I = 0$. Même question avec $A^2 - \sqrt{2}A + I = 0$.

Exercice 4 Montrer que si n est impair et $A \in M_n(\mathbf{R})$ antisymétrique, alors $\det A = 0$.

Exercice 5 Montrer que si $A \in M_n(\mathbf{C})$, alors $\det \bar{A} = \overline{\det A}$. En déduire que si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ satisfont $AB = BA$, alors $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Exercice 6 Calculer pour tout $n \geq 2$

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ x & \ddots & & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & a_1 \end{vmatrix} \quad \text{puis} \quad \Gamma_n := \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & a_1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_1 & x \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 Calculer

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 8 Montrer que si $P \in \mathbf{R}[X]$ est tel que $\deg P < n$, et

$$A = \begin{bmatrix} P(x) & P(x+1) & \cdots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \cdots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(x+n) & p(x+n+1) & \cdots & P(x+2n) \end{bmatrix},$$

alors $\det A = 0$. Calculer $\det B$ avec

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & \cdots & n^2 \\ 1 & 4 & 9 & \cdots & (n+1)^2 \\ 4 & 9 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & \cdots & (2n)^2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 9 Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $a \neq b$ fixés. Montrer que

$$\Delta(X) := \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & b+X & \cdots & b+X \\ a+X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+X \\ a+X & \cdots & a+X & \lambda_n + X \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré au plus 1, calculer $\Delta(-a)$ et $\Delta(-b)$ et en déduire $\Delta = \Delta(0)$.