Algèbre linéaire pour l'économie
Feuille de TD 6 : Matrices d'applications linéaires, dualité
Séances des 9 et 16 novembre environ

Exercice 1 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-1, 1, 2)$.

1. *Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.*
2. *Déterminer la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.*
3. *En déduire que f est une symétrie par rapport à un plan vectoriel que l'on déterminera.*

Exercice 2 *Soit g l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par rapport aux deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. *On prend dans $\mathbf{R}^3$ la nouvelle base $e_1' = e_2 + e_3, e_2' = e_1 + e_3, e_3' = e_1 + e_2$. Écrire la matrice B de g quand on se place dans cette base.*
2. *On prend dans $\mathbf{R}^2$ la nouvelle base $f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$. Écrire la matrice C de g par rapport aux bases (e_1', e_2', e_3') et (f_1', f_2').*

Exercice 3 *Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (X, Y, Z)$ avec :*

$$X = x - y + z + t, Y = x + 2z - t, Z = x + y + 3z - 3t.$$

1. *Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques?*
2. *Montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{im} f$ et la compléter en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.*
3. *Montrer que $\ker f$ est de dimension 2 et donner une base (u_1, u_2) de $\ker f$.*
4. *Vérifier que (e_1, e_2, u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^4$. Quelle est la matrice de f dans les bases (e_1, e_2, u_1, u_2) et $\mathcal{B}$?*

Exercice 4 *Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soient $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ et $\varepsilon_2 = (1, 2, 1)$.*

1. *Vérifier que les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et e_1 forment une base de $\mathbf{R}^3$.*
2. *Soit f l'application linéaire définie de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ par :*

   $$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad f(e_1) = e_1 + e_2.$$

   Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. *Calculer la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1)$.*

Exercice 5 *Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par*

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z).$$

1. *Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.*

2. *Montrer que les vecteurs* $v_1 = (2, 1, -1)$*,* $v_2 = (2, -1, 2)$ *et* $v_3 = (3, 0, 1)$ *forment une base de* $\mathbf{R}^3$*. Donner la matrice de* f *dans la base* (v_1, v_2, v_3)*.*

Exercice 6 *Considérons l'espace vectoriel* $\mathbf{R}^n$ *; notons* $(e_1, \dots, e_n)$ *sa base canonique et* v *le vecteur défini par* $v = e_1 + \dots + e_n$*. Soit* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *l'application linéaire définie, pour* $i = 1, \dots, n$*, par* $f(e_i) = e_i + v$*.*

1. *Montrer que tout vecteur de* $\ker f$ *est colinéaire à* v *et, en fait, égal à* 0*.*

2. *Montrer que* f *est un isomorphisme.*

3. *Écrire la matrice de* f *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^n$*.*

Exercice 7 *Soit* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *une application linéaire. Posons* $g = f - \mathrm{Id}$ *; supposons que* $g \circ g \neq 0$ *et que* $g \circ g \circ g = 0$*.*

1. *Soit* v *dans* $\mathbf{R}^3$ *tel que* $g \circ g(v) \neq 0$*. Montrer que les vecteurs* v*,* $g(v)$ *et* $g \circ g(v)$ *forment une base de* $\mathbf{R}^3$*.*

2. *Donner la matrice de* g *puis la matrice de* f *dans la base* $\{v, g(v), g \circ g(v)\}$*.*

3. *Supposons maintenant que* f *est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$ *est :*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Posons $v = (1, 0, 0)$*. Montrer que* f *et* v *vérifient les conditions énoncées en 1). Écrire la matrice de* f *dans la base* $(v, g(v), g \circ g(v))$*.*

Exercice 8 *Soient* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbf{R}^3$ *et* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'application linéaire définie par :*

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z).$$

1. *Écrire la matrice de* f *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$*.*

2. *Considérons les vecteurs* $v_1 = (1, 0, 2)$*,* $v_2 = (1, 1, 2)$ *et* $v_3 = (2, 1, 5)$ *de* $\mathbf{R}^3$*. Montrer que* (v_1, v_2, v_3) *est une base de* $\mathbf{R}^3$ *et calculer la matrice de* f *dans cette base.*

Exercice 9 *Soient* E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension* 3 *et* (e_1, e_2, e_3) *une base de* E*. Notons* $f : E \to E$ *l'application linéaire dont la matrice dans la base* (e_1, e_2, e_3) *est :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

1. *Trouver une base de* $\ker f$*.*

2. *Posons* $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$*,* $v_2 = e_2 + e_3$ *et* $v_3 = e_1 + 2e_3$*. Montrer que* (v_1, v_2, v_3) *est une base de* E*. Calculer la matrice de* f *dans cette base.*

3. *En déduire que l'on a* $f \circ f = -f$*.*

Exercice 10 *Notons* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbf{R}^3$*. Soit* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'unique application linéaire telle que :*

$$f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3, f(e_2) = -2e_1 + 2e_3 \mathrm{et} f(e_3) = -4e_1 + e_2 + 4e_3.$$

1. *Écrire la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}$*.*

2. *Donner une base de* $\mathrm{im} f$ *et une équation de* $\mathrm{im} f$*.*

3. *Pour quelles valeurs du paramètre réel* t *l'application linéaire* $f - t\mathrm{Id}$ *est-elle un isomorphisme ?*

4. *Trouver une base* v_1 *de* $\ker(f - 3\mathrm{Id})$ *et une base* v_2 *de* $\ker f$. *Montrer que les vecteurs* v_1 *et* v_2 *sont linéairement indépendants. Trouver* v_3 *dans* $\mathbf{R}^3$ *tel que* (v_1, v_2, v_3) *soit une base de* $\mathbf{R}^3$. *Quelle est la matrice de* f *dans la base* (v_1, v_2, v_3) *?*

Exercice 11 *Soient* E *un espace vectoriel de dimension 3 et* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *une base de* E. *Notons* f *l'application linéaire de* E *dans* E *dont la matrice dans la base* $\mathcal{B}$ *est :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. *Écrire la matrice de* f *dans la base* (e_3, e_2, e_1).

2. *Écrire la matrice de* f *dans la base* $(e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

Exercice 12 *Dans l'espace vectoriel* $\mathbf{R}^3$ *muni de sa base canonique* (e_1, e_2, e_3), *on considère l'endomorphisme* u *défini par :*

$$u(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3, \quad u(e_2) = e_1 - e_2 \quad \text{et} \quad u(e_3) = e_2 - e_3.$$

1. *Écrire la matrice* M *de* u *dans la base canonique. Calculer* M^2 *et vérifier que* $M^3 = 0$.

2. *Déterminer* $\ker u$, $\ker u^2$, $\mathrm{im} u$, $\mathrm{im} u^2$ *et donner les relations d'inclusion entre ces sous-espaces.*

3. *On pose* $e'_1 = u^2(e_1), e'_2 = -u(e_3), e'_3 = e_3$. *Montrer que* (e'_1, e'_2, e'_3) *est une base de* $\mathbf{R}^3$. *Donner la matrice* N *de* u *dans cette base.*

4. *Soit* S *la matrice de passage de* (e_1, e_2, e_3) *à* (e'_1, e'_2, e'_3). *Calculer* S^2 *et en déduire* S^{-1}. *Vérifier que* $S^{-1}MS = N$.

Exercice 13 *Soit*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbf{R}_{\leq 4}[X] & \to & \mathbf{R}_{\leq 4}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

1. *Déterminer la matrice* A *de* ϕ *dans la base* $(1, X, \frac{X^2}{2!}, \frac{X^3}{3!}, \frac{X^4}{4!})$.

2. *Que vaut* A^5 *?*

Exercice 14 *Soit* φ *l'endomorphisme de* $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$ *défini par :*

$$\varphi(P)(X) = P(X + 1).$$

1. *Déterminer la matrice* A *de* φ *dans la base canonique* $(1, X, X^2, X^3)$.

2. *Montrer que* A *est inversible.*

Exercice 15 *Soit* φ *l'application de* $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$ *dans* $\mathbf{R}[X]$ *définie par :*

$$\varphi(P)(X) = P(X) - XP'(X).$$

1. *Montrer que* φ *définit un endomorphisme de* $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$.

2. *Déterminer le noyau de* φ.

3. *Déterminer la matrice* M *de* φ *dans la base canonique* $(1, X, X^2, X^3)$.

4. *Quel est le rang de* M *?*

Exercice 16 *Soit* u *l'application définie sur* $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$ *par*

$$u(P) = X^2 P''(X) - 3XP'(X).$$

1. *Montrer que u est une application linéaire de $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$ dans $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$. Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$.*

2. *Déterminer* $\ker u$ *et* $\mathrm{Im} u$. *En donner des bases et les dimensions.*

3. *L'équation $u(P) = 1$ a-t-elle une solution dans $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$? Donner une solution de l'équation $u(P) = X^3$. Si P_1 et P_2 sont deux solutions de cette équation, que peut-on dire de $P_1 - P_2$? Donner toutes les solutions de l'équation $u(P) = X^3$.*

Exercice 17 *Soient* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *et :*

$$\begin{array}{rcl} \psi : M_2(\mathbf{R}) & \rightarrow & M_2(\mathbf{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

1. *Montrer que ψ est linéaire. Calculer $\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$. Déterminer une base de* $\ker \psi$ *et une base de* $\mathrm{im}\psi$.

2. *Donner la matrice K de ψ dans la base canonique de $M_2(\mathbf{R})$.*

3. *Trouver une base de $M_2(\mathbf{R})$ dans laquelle la matrice de ψ soit :*

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$