Feuille 5: Corrigé d'exercices

December 10, 2018

Exercice 1.

1. Pratiquons l'algorithme de Gauss-Jordan pour la matrice formée par les vecteurs v_1, v_2, v_3:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(Les opérateurs sur les lignes sont:
$$L_1 + L_2; -L_1 + L_3 \to \frac{L_2}{2} \to -L_2 + L_1; L_2 + L_3 \to \frac{L_3}{3} \to L_1 + L_3$$
) Il résulte qu'il y a 3 pivots dans la forme FREL, donc la famille v_1, v_2, v_3 sont libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$ donc la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

2. Notons $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canoique de $\mathbb{R}^3$. On a le diagramme commutatif suivant: (*faites attention aux sens des flèches!*).
$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \arrow[r, "Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f)"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \arrow[d, "Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})"] \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \arrow[u, "Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})"] \arrow[r, "Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \end{tikzcd}$$
Ici: -$Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f)$: la matrice de f par rapport à la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$
- $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$: la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
- $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})$: la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique $\mathcal{C}$.
- $Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$: la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base canonique $\mathcal{B}$.

Cela implique:
$$Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}).Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f).Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})$$

- $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique $\mathcal{C}$, Par définition, on a:

$$v_1 = (1,-1,1) = 1.e_1 - 1.e_2 + 1.e_3$$
$$v_2 = (1,1,0) = 1.e_1 + 1.e_2 + 0.e_3$$
$$v_3 = (-1,1,2) = -1.e_1 + 1.e_2 + 2.e_3$$

Par conséquent, $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Par l'hypothèse: $Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f) = M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculons $Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$, on sait que $Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$ est la matrice inverse de la matrice $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})$, autrement dit:

$$Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = (Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}))^{-1}$$

Pratiquons l'algorithme de Gauss Jordan pour la matrice étendue de la matrice $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Par suite, $(Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$.

Finalement,

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) &= Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}).Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f).Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} . \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Fixon un vecteur quelconque $v \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire: $v = x.v_1 + y.v_2 + z.v_3$. Puisque la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, les coordonnées de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont calculés comme suit:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c'est à dire $f(v) = (-x).v_1 + y + v_2 + z.v_3$. Il résulte que

$$\frac{v + f(v)}{2} = \frac{x.v_1 + y.v_2 + z.v_3 + (-x).v_1 + y + v_2 + z.v_3}{2} = y.e_2 + z.e_3$$

Remarquons que les vecteurs $y.e_2 + z.e_3$ appartient au plan P d'équation $x = 0$ dans la base $\mathcal{B}$. Par conséquent, $\frac{v+f(v)}{2}$ appartient à P et f est la symétrie par rapport au plan P d'équation $x = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2.

Notons $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$.

1. On a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \arrow[r, "Mat_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(g)"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{F}) \arrow[d, "Mat_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(id_{\mathbb{R}^2})"] \\
(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}') \arrow[u, "Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3})"] \arrow[r, "Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{F}}(g)"'] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

Par suite,

$$Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{F}}(g) = Mat_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(id_{\mathbb{R}^2}).Mat_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(g).Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3})$$

-Notons $\mathcal{E}' = (e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'})$ la nouvelle base de $\mathbb{R}^3$. Par dfinition la matrice de passage de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$ est :

$$Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $Math_{\mathcal{F}\mathcal{F}}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc,

$$Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{F}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Notons $\mathcal{F}' = (f_1', f_2')$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3,\mathcal{E}) \arrow[r, "Mat_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(g)"] & (\mathbb{R}^2,\mathcal{F}) \arrow[d, "Mat_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}(id_{\mathbb{R}^2})"] \\
(\mathbb{R}^3,\mathcal{E}') \arrow[u, "Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3})"] \arrow[r, "Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{F}'}(g)"'] & (\mathbb{R}^2,\mathcal{F}')
\end{tikzcd}$$

Par suite,

$$Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{F}'}(g) = Mat_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}(id_{\mathbb{R}^2}).Mat_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(g).Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3})$$

- La matrice de passage de la base $\mathcal{F}'$ à la base $\mathcal{F}$ est

$$Mat_{\mathcal{F}'\mathcal{F}}(id_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$Mat_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}(id_{\mathbb{R}^2})$ est la matrice inverse de $Mat_{\mathcal{F}'\mathcal{F}}(id_{\mathbb{R}^2})$. Pratiquons GJ:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

D'où,

$$Mat_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}(id_{\mathbb{R}^2}) = (Mat_{\mathcal{F}'\mathcal{F}}(id_{\mathbb{R}^2}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$Mat_{\mathcal{E}'\mathcal{F}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. 1. Calculons $f(e_1) = (1,1,1), f(e_2) = (-1,0,1), f(e_3) = (1,2,3), f(e_4) = (1,-1,-3)$. Donc la matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

2. **Remarque**: L'image de f est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendé par $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$: $Imf = Vect(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$. Pratiquons GJ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la forme FREL, il y a 2 pivots se trouvant à deux premières colonnes, il s'ensuit que $f(e_1), f(e_2)$ sont libres et de plus $f(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2), f(e_4) = -f(e_1) - 2f(e_2)$, par suite

$$Imf = Vect(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = Im(f(e_1), f(e_2))$$

-La famille $f(e_1), f(e_2)$ est libre et génératrice de Imf donc c'est une base de Imf.
- Posons $v = (0, 0, 1)$, montrons que la famille $\{f(e_1), f(e_2), v\}$ est libre:
En effet, par GJ

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots dans la forme FREL donc $\mathcal{B} = \{f(e_1), f(e_2), v\}$ est libre et cela forme une base de $\mathbb{R}^3$.

3. $Ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : f(x, y, z, t) = 0\}$, autrement dit, un vecteur $(x, y; z, t)$ appartient à $Ker(f)$ si et selement si il est solution du système linéaire:

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + 2z + t = 0 \\ x + y + 3z - 3t = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Gauss-Jordan en question 2, on a :

$$\begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z + t \\ y = -z + 2t \end{cases}$$

D'où: $Ker(f) = \{(-2z+t, -z+2t, z, t),\ z, t \in \mathbb{R}\} = \{z.(-2, -1, 1, 0)+t.(1, 2, 0, 1),\ z, t \in \mathbb{R}\} = Vect(((-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1))$. Par suite la famille $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ est une famille génératrice de $Ker(f)$.
Montrons que cette famille est libre: supposons $x.(-2, -1, 1, 0) + y.(1, 2, 0, 1) = 0 \Longrightarrow x = y = 0$ donc $u_1 = (-2, -1, 1, 0), u_2 = (1, 2, 0, 1)$ sont libres et forment une base de $Ker(f)$.

4. Pratiquons GJ pour la famille (e_1, e_2, u_1, u_2), on a 4 pivots dans la forme FREL, donc c'est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
Calculons la matrice de f dans les base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, u_1, u_2)$ et $\mathcal{B}$ en question 2. On a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^4, \mathcal{C}) \arrow[r, "Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f)"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \arrow[d, "Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})"] \\ (\mathbb{R}^4, \mathcal{E}) \arrow[u, "Mat_{\mathcal{E}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^4})"] \arrow[r, "Mat_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f)"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

$Mat_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f) = Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}).Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f).Mat_{\mathcal{E}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^4})$.
Où $Mat_{\mathcal{E}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = (Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Pratiquons GJ:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Donc $Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Finalement la matrice de f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ est:

$$Mat_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. 1. Pratiquez GJ

2. Notons $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{E} = (\epsilon_1, \epsilon_2, e_1)$ la nouvelle base. Par l'hypothèse, on a :
   $f(\epsilon_1) = \epsilon_2 = (1, 2, 1) = 1.e_1 + 2e_2 + 1.e_3$
   $f(\epsilon_2) = \epsilon_2 = (1, 2, 1) = 1.e_1 + 2e_2 + 1.e_3$
   $f(e_1) = e_1 + e_2 = e_1 + e_2 + 0e_3$.

   Par conséquent, la matrice de $f : (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}^3, \mathcal{C})$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \arrow[r, "A"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \arrow[d, "Q"] \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f)"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \end{tikzcd}$$

   Il s'ensuit que la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ est $Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f) = Q.A.P$. Ici $Q = Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers elle même et $P = Mat_{\mathcal{C}\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3})$ est est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}$ et on peut la calculer par GJ: c'est la matrice inverse de la matrice $Mat_{\mathcal{E}\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Réponse: $Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f) = Q.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque: Vous pouvez la calculer comme suit: La matrice de f dans la base canonique est formée par les coordonnées des vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ dans la base canonique. Or :
$f(e_1) = e_1 + e_2 = (1,1,0)$
$e_2 = -\epsilon_1 + \epsilon_2 \Longrightarrow f(e_2) = f(-\epsilon_1) + f(\epsilon_2) = -f(\epsilon_1) + f(\epsilon_2) = -\epsilon_2 + \epsilon_2 = (0,0,0)$
$f(e_3) = 2\epsilon_1 - \epsilon_2 - e_1 \Longrightarrow f(e_3) = 2f(\epsilon_1) - f(\epsilon_2) - f(e_3) = (2,4,2) - (1,2,1) - (1,1,0) = (0,1,1)$. D'où le résultat.

3. Réponse $Mat_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5. 1. Réponse: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Pratiquez GJ pour montrer que v_1, v_2, v_3 est une base de $\mathbb{R}^3$.
$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la nouvelle base, $\mathcal{C}$ la base canonique

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) & \xrightarrow{Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f)} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \\ P \uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow[Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)]{} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \end{array}$$

$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ (attention: Pratiquez GJ pour calculer P^{-1})

$Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = P^{-1}.Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f).P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8. 1. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la nouvelle base, $\mathcal{C}$ la base canonique

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) & \xrightarrow{Mat_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f)} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \\ P \uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow[Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)]{} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \end{array}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et par GJ on peut calculer: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$Mat_{\mathcal{BB}}(f) = P^{-1}.Mat_{\mathcal{CC}}(f).P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 9. 1. Pratiquez Gauss-Jordan, $Ker(f) = Vect(v)$, où $v = \frac{4}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + e_3 \in E$.

2. Réponse $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 10. 1. On a: $f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3 = (-1, 1, 1), f(e_2) = (-2, 0, 2), f(e_3) = (-4, 1, 4)$, par conséquent, la matrice de f dans la base canonique est: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $Im(f) = Vect(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$, puis vous pratiquez GJ pour la famille $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, vous trouvrez une base de $Im(f)$, c'est $\{f(e_1), f(e_2)\}$.
L'equation de $Im(f)$ est $x + z = 0$ (revoir l'exo 3.1b de la feuille 4).

4. $Ker(f - 3Id) = Vect((-1, 0, 1))$ et $v_1 = (-1, 0, 1)$ est une base de $Ker(f - 3Id)$.
$Ker(f) = Vect((-1, \frac{-3}{2}, 1))$ et $v_2 = (-1, \frac{-3}{2}, 1)$ est une base de $Ker(f)$.
On peut ajouter $v_3 = (0, 0, 1)$ pourque (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$. Puis vous faites un diagramme pour calculer la matrice de f dans cette base. (Réponse: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$) (attention: si vous choisissez une autre vecteur v_3, vous aurez un autre résultat!)

Exercice 11. 1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 12. 1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $Ker(u) = \{(x,y,z) : u(x,y,z) = 0)\} = Vect((1,-2,1))$;
La matrice de u^2 dans la base canonique est M^2 et $Ker(u^2) = \{(x,y,z) : u^2(x,y,z) = 0)\} = Vect((-1,1,0),(-1,0,1))$.
$Im(u) = Vect((u(e_1),u(e_2),u(e_3)) = Vect((2,-3,1),(1,-1,0),(0,1,-1))$, puis vous pratiquez GJ pour trouver une base de $Im(u)$: $Im(u) = Vect((2,-3,1),(1,-1,0))$.
De même, $Im(u^2) = Vect((u^2(e_1),u^2(e_2),u^2(e_3)) = Vect((1,-2,1),(1,-2,1),(1,-2,1)) = Vect((1,-2,1))$.
On a $Ker(u) = Im(v^2)$, $Im(u) = Ker(u^2)$.

3. $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = S$, d'où $S^{-1}MS = N$

Exercice 15. 1. $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ est un $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ contenant des polynomês de degrée ≤ 3. Pour montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$, on doit montrer 2 choses:

- Si $P(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$, alors $\varphi(P)(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$, autrement dit, $\varphi(P)(X)$ est un polynôme de degrée ≤ 3
- φ est linéaire

En effet, prenons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a:
$P'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$
$\Rightarrow \varphi(P)(X) = P(X) - X.P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 - X.(a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2) = a_0 - a_2X^2 - 2a_3X^3$. Cela implique que $\varphi(P)(X)$ est un polynôme de degrée ≤ 3, donc $\varphi(P)(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$.
De même, $\varphi(Q(X) = b_0 - b_2X^2 - 2b_3X^3$. Par suite:
- $\varphi(P)(X) + \varphi(Q)(X) = a_0 - a_2X^2 - 2a_3X^3 + b_0 - b_2X^2 - 2b_3X^3 = (a_0 + b_0) - (a_2 + b_2)X^2 - 2(a_3 + b_3)X^3 = \varphi(P+Q)(X)$.
-$\lambda.\varphi(P)(X) = \lambda(a_0 - a_2X^2 - 2a_3X^3) = \varphi(\lambda.P)(X)$. Cela montre que φ est linéaire. Par conséquent φ est un endo de $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$.

2.

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \{P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 : \varphi(P)(X) = a_0 - a_2X^2 - 2a_3X^3 = 0\} \\ &= \{P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 : a_0 = a_2 = a_3 = 0\} \\ &= \{a_1X, a_1 \in \mathbb{R}\} = Vect(X). \end{aligned}$$

3. Rappel: Si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, alors $\varphi(P)(X) = a_0 - a_2X^2 - 2a_3X^3$.

- $P(X) = 1, \varphi(P)(X) = 1$
- $P(X) = X, \varphi(P)(X) = 0$
- $P(X) = X^2, \varphi(P)(X) = -X^2$
- $P(X) = X^3, \varphi(P)(X) = -2X^3$

Par suite, la matrice de φ dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Pratiquez GJ pour la matrice M, rang(M)= nombre de pivots= 3. Ou bien vous pouvez appliquer le théorème du rang: $\dim(Ker(\varphi)) + \dim(Im(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}\leq 3[X] = 4 \to \dim(Im(\varphi)) = 4 - \dim(Ker(\varphi)) = 4 - 1 = 3$. d'où $rang(M) = \dim(Im(\varphi)) = 3$.