Géométrie différentielle. Feuille de TD 5: Surfaces

Toutes les surfaces considérées sont des sous-variétés de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. On les suppose suffisamment régulières pour que toutes les questions posées aient un sens.

Exercice 1 Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ de classe C^k, $k \geq 2$, et $m_0 \in S$ un point fixé.
a) Montrer qu'elle peut s'écrire au voisinage de 0 comme $f^{-1}(0)$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est un plongement vérifiant $\nabla f(m_0) = (0, 0, 1)$, et $\|\nabla f(m)\| = 1$.
b) En déduire que l'endomorphisme de Weingarten $v \in T_{m_0}S \to T_{m_0}\vec{n}.v$ est symétrique.

Exercice 2 (Surfaces compactes) Montrer qu'une surface compacte de $\mathbb{R}^3$ admet nécessairement un point de courbure strictement positive. On pourra étudier la fonction $m \in S \to d(m, O)^2$ où $O \notin S$ est un point fixé arbitraire.
Allez lire par exemple ici pour un plongement isométrique du tore plat dans $\mathbb{R}^3$. Et cherchez l'« erreur ».
`http://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html`

Exercice 3 (Surfaces de révolution) Soit $\varphi : (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (t, g(t)\cos\theta, g(t)\sin\theta)$ un paramétrage d'une surface de révolution S, avec g une fonction de classe C^2. On suppose que l'image de φ est une sous-variété de dimension 2, au moins C^2, de $\mathbb{R}^3$.
a) En un point $\varphi(t, \theta)$, calculez l'espace tangent, une normale unitaire orientée, la première et la seconde forme fondamentale, les courbures principales, la courbure moyenne, et la courbure de Gauss.
b) Montrez que les surfaces paramétrées par les fonctions suivantes ont même courbure mais ne sont pas localement isométriques.
$\varphi_1 : (t, \theta) \mapsto (t\sin\theta, t\cos\theta, \log t)$
$\varphi_2 : (t, \theta) \mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$
c) On considère la *tractrice* dans le plan, définie par la propriété suivante. Le point $M(t)$ se déplace en partant de $(1, 0)$, en suivant un point $T(t)$ qui se déplace le long de $(0, t)$, pour $t \geq 0$, de sorte que la droite $M(t)T(t)$ est tangente à la courbe $t \to M(t)$. Déterminer un paramétrage de la tractrice.
d) On considère maintenant la surface de révolution associée à la tractrice ci-dessus. Calculez sa courbure. Cette surface s'appelle pseudosphère.

Exercice 4 On considère le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ paramétré par $(\theta, \varphi) \mapsto ((2 + \cos\theta)\cos\varphi, (2 + \cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta)$. Quels sont les points de courbure positive ? Nulle ?Négative ? Répondez d'abord intuitivement à l'aide d'un dessin, puis justifiez par un calcul.

Exercice 5 Quelles sont les géodésiques de la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$? D'un cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^3$? d'un plan $z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6 (Surfaces minimales) Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ une sous-variété de dimension 1, non planaire a priori, paramétrée par $c : \mathbb{R} \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ périodique. Soit S une surface paramétrée telle que $\partial S = \mathcal{C}$. Pour simplifier, on supposera que c s'écrit $c(t) = (\gamma(t), h(\gamma(t))$ où γ est une courbe simple fermée du plan. On notera U l'intérieur de γ dans le plan (bien défini d'après le théorème de Jordan). On supposera que S est paramétrée par un graphe $(x, y) \in U \mapsto f(x, y)$ de sorte que $f_{|\partial U} = h$.
a) Faites un dessin
L'aire de S, en anticipant un peu, est définie par

$$\mathcal{A}(S) = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}$$

On cherche à minimiser cette aire, i.e. à trouver les surfaces (appelées minimales), ou encore les fonctions f, telles que cette aire est minimale.
b) Soit f une fonction qui réalise le minimum, et $g \in C_c^\infty(U)$ une fonction à support compact. Vérifier que la surface donnée par le graphe de $f + \varepsilon g$ a toujours pour bord $\mathcal{C}$. Que doit vérifier la fonction $\varepsilon \to \mathcal{A}(f + \varepsilon g)$?
c) En déduire que f vérifie

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}} = 0$$

d) Calculez la courbure moyenne (trace de la seconde forme fondamentale) en un point de la surface définie comme le graphe de f, en termes des dérivées partielles de f.
e) Conclure.

On appelle souvent surface minimale *une surface à courbure moyenne nulle. En particulier, une surface minimale est à courbure de Gauss négative ou nulle.*

Exercice 7 Une surface réglée est une surface qui admet un paramétrage sous la forme $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto c(u) + v\vec{\tau}(u)$, où $u \mapsto c(u)$ est une courbe à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et $u \mapsto \tau(u)$ est une courbe à valeurs dans $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, de sorte que $(c'(u), \tau(u))$ forme une famille libre.
a) Calculez, en un point $M(u,v)$ de la surface, l'espace tangent, une normale unitaire orientée, la première et la seconde forme fondamentale, les courbures principales, la courbure moyenne, et la courbure de Gauss.
b) Montrez que l'hyperboloide à une nappe $z^2 + 1 = x^2 + y^2$ est une surface réglée, et même, qu'il y a deux droites distinctes passant par tout point de l'hyperboloide.
c) Même question avec le paraboloide hyperbolique d'équation $z = x^2 - y^2$.

Exercice 8 Représenter l'image de l'application $(\theta, t) \mapsto \left(\cos\theta + t\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta, \sin\theta + t\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta, t\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

Exercice 9 Un ombilic est un point d'une surface dont les courbures principales sont égales.
a) Quels sont les ombilics d'un hyperboloide à une nappe ?
b) Quels sont les ombilics d'un ellipsoïde d'équation $x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1$? Même question avec une sphère.
c) Quelle(s) surface(s) de $\mathbb{R}^3$ n'admet(tent) que des ombilics ?

Exercice 10 (Surfaces développables) Une surface développable est une surface réglée telle que $\tau'(u)$ appartient au plan $(c'(u), \tau(u))$. Calculez la deuxième forme fondamentale d'une surface développable. Montrez qu'une surface développable est localement isométrique au plan.