Feuille 5 : Matrices d'applications linéaires

Exercice 1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Soient $v_1 = (1,-1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (-1,1,2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire que f est une symétrie par rapport à un plan vectoriel que l'on déterminera.

Exercice 2 Soit g l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans les bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) est $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbf{R}^3$ la nouvelle base $e_1' = e_2 + e_3, e_2' = e_1 + e_3, e_3' = e_1 + e_2$. Écrire la matrice B de g quand on se place dans cette base.
2. On prend dans $\mathbf{R}^2$ la nouvelle base $f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$. Écrire la matrice C de g par rapport aux bases (e_1', e_2', e_3') et (f_1', f_2').

Exercice 3 Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x,y,z,t) = (X,Y,Z)$ avec $X = x - y + z + t, Y = x + 2z - t, Z = x + y + 3z - 3t$.

1. Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques?
2. Montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{im} f$ et la compléter en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.
3. Montrer que $\ker f$ est de dimension 2 et donner une base (u_1, u_2) de $\ker f$.
4. Vérifier que (e_1, e_2, u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^4$. Quelle est la matrice de f dans les bases (e_1, e_2, u_1, u_2) et $\mathcal{B}$?

Exercice 4 Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soient $\varepsilon_1 = (1,1,1)$ et $\varepsilon_2 = (1,2,1)$.

1. Vérifier que les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et e_1 forment une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ par $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \quad$ et $\quad f(e_1) = e_1 + e_2$. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. Calculer la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1)$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (x + y, 2x - y + z, x + z)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (2,1,-1)$, $v_2 = (2,-1,2)$ et $v_3 = (3,0,1)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$. Donner la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 6 Considérons l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$; notons $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique et v le vecteur défini par $v = e_1 + \ldots + e_n$. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application linéaire définie, pour $i = 1, \ldots, n$, par $f(e_i) = e_i + v$.

1. Montrer que tout vecteur de $\ker f$ est colinéaire à v et, en fait, égal à 0.
2. Montrer que f est un isomorphisme.
3. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ une application linéaire. Posons $g = f - \mathrm{Id}$; supposons que $g \circ g \neq 0$ et que $g \circ g \circ g = 0$.

1. Soit v dans $\mathbf{R}^3$ tel que $g \circ g(v) \neq 0$. Montrer que les vecteurs v, $g(v)$ et $g \circ g(v)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Donner la matrice de g puis la matrice de f dans la base $\{v, g(v), g \circ g(v)\}$.

3. Supposons maintenant que f est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Posons $v = (1, 0, 0)$. Montrer que f et v vérifient les conditions énoncées en 1). Écrire la matrice de f dans la base $(v, g(v), g \circ g(v))$.

Exercice 8 Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. Considérons les vecteurs $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ et $v_3 = (2, 1, 5)$ de $\mathbf{R}^3$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 9 Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Notons $f : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

1. Trouver une base de $\ker f$.
2. Posons $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + 2e_3$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E. Calculer la matrice de f dans cette base.
3. En déduire que l'on a $f \circ f = -f$.

Exercice 10 Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'unique application linéaire qui vérifie $f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 2e_3$ et $f(e_3) = -4e_1 + e_2 + 4e_3$.

1. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner une base de $\mathrm{im} f$ et une équation de $\mathrm{im} f$.
3. Pour quelles valeurs du paramètre réel t l'application linéaire $f - t\mathrm{Id}$ est-elle un isomorphisme ?
4. Trouver une base v_1 de $\ker(f - 3\mathrm{Id})$ et une base v_2 de $\ker f$. Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. Trouver v_3 dans $\mathbf{R}^3$ tel que (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbf{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) ?

Exercice 11 Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Notons f l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Écrire la matrice de f dans la base (e_3, e_2, e_1).
2. Écrire la matrice de f dans la base $(e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

Exercice 12 Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère l'endomorphisme u défini par $u(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3$, $u(e_2) = e_1 - e_2$ et $u(e_3) = e_2 - e_3$.

1. Écrire la matrice M de u dans la base canonique. Calculer M^2 et vérifier que $M^3 = 0$.
2. Déterminer $\ker u$, $\ker u^2$, $\mathrm{im} u$, $\mathrm{im} u^2$ et donner les relations d'inclusion entre ces sous-espaces.
3. On pose $e_1' = u^2(e_1), e_2' = -u(e_3), e_3' = e_3$. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbf{R}^3$. Donner la matrice N de u dans cette base.
4. Soit S la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e_1', e_2', e_3'). Calculer S^2 et en déduire S^{-1}. Vérifier que $S^{-1}MS = N$.

Exercice 13 Soit $\phi : \mathbf{R}_{\leq 4}[X] \to \mathbf{R}_{\leq 4}[X]$ l'application $P \mapsto P'$.

1. Déterminer la matrice A de ϕ dans la base $(1, X, \frac{X^2}{2!}, \frac{X^3}{3!}, \frac{X^4}{4!})$.
2. Que vaut A^5?

Exercice 14 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$ défini par $\varphi(P)(X) = P(X+1)$.

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
2. Montrer que A est inversible.

Exercice 15 Soit φ l'application de $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$ définie par $\varphi(P)(X) = P(X) - XP'(X)$.

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
4. Quel est le rang de M?

Exercice 16 Soit u l'application définie sur $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$ par $u(P) = X^2P''(X) - 3XP'(X)$.

1. Montrer que u est une application linéaire de $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$ dans $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$. Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$.
2. Déterminer $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$. En donner des bases et les dimensions.
3. L'équation $u(P) = 1$ a-t-elle une solution dans $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$? Donner une solution de l'équation $u(P) = X^3$. Si P_1 et P_2 sont deux solutions de cette équation, que peut-on dire de $P_1 - P_2$? Donner toutes les solutions de l'équation $u(P) = X^3$.

Exercice 17 Soient $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et

$$\begin{array}{rcl} \psi : M_2(\mathbf{R}) & \to & M_2(\mathbf{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

1. Montrer que ψ est linéaire. Calculer $\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$. Déterminer une base de $\ker \psi$ et une base de $\mathrm{im}\psi$.
2. Donner la matrice K de ψ dans la base canonique de $M_2(\mathbf{R})$.
3. Trouver une base de $M_2(\mathbf{R})$ dans laquelle la matrice de ψ soit $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Opérations sur les sev, projections et symétries

Exercice 18 Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels de E. Comparer $F \cap G$, $F \cap H$, et $F \cap (G + H)$.

Exercice 19 **a)** Soient f, g deux applications linéaires de E dans E. Montrer que $Im(f \circ g) \subset Im(f)$. Donner un exemple où l'inclusion n'est pas une égalité et un exemple où c'est une égalité.
b) De même, montrer que $Ker(f \circ g) \supset Kerg$, et donner des exemples où l'inclusion est/n'est pas une égalité.
c) Montrer que si $f \circ g = Id_E$, alors $Ker(g) = \{0\}$ et $Im(f) = E$.

Exercice 20 (Projecteurs) **a)** On suppose que l'espace vectoriel E s'écrit comme somme directe $E = F \oplus G$, où F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Tout élément $u \in E$ s'écrit de manière unique $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Soit $p_F : u \to u_F$ la *projection sur F parallèlement à G*. Montrer que $p_F \circ p_F = p_F$. On appelle *projecteur linéaire* une application linéaire vérifiant cela ($f \circ f = f$).
b) Soit $p : E \to E$ un projecteur linéaire, i.e. une application linéaire telle que $p \circ p = p$. Montrer qu'alors $E = F \oplus G$, avec $F = Kerp$ et $G = Imp$ et p est la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 21 (Symétries) **a)** Soit s une application linéaire de E dans E telle que $s \circ s = Id$. Soit $F = Ker(s - Id_E)$ et $G = Ker(s + Id_E)$. Montrer que $E = F \oplus G$.
b) Soit s une réflexion orthogonale par rapport à un plan vectoriel P de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que $s \circ s = Id_E$. Qui sont dans ce cas F et G ?
c) Même question avec une réflexion par rapport à une droite de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22 Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$ et $F_1 = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0)$ sont-ils supplémentaires ? Pourquoi ?
Même question avec $E_2 = \{(3t, 3t, t), t \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(2u + v, u + 2v, u), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.
Même question avec $E_3 = \{(2u + v, u + 2v, u + v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ et $F_3 = \{(u + v, u + v, 2u), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 23 Donnez deux supplémentaires distincts de $\mathbb{R}.(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Un dessin sera bienvenu.

Exercice 24 Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, et $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $\varphi(u) \neq 0$. Montrer que $\mathbb{R}^n = Ker\varphi \oplus \mathbb{R}.u$