Algèbre linéaire pour l'économie
Feuille de TD 5 : Dimension, rang, bases
Séances des 19 octobre, 2 novembre, 4 novembre environ

Exercice 1 Dans l'espace $\mathbf{R}^4$, vérifier que les vecteurs

$$u_1 = (1, 2, -1, -2), \quad u_2 = (2, 3, 0, -1, \quad u_3 = (1, 3, -1, 0) \quad \text{et} \quad u_4 = (1, 2, 1, 4)$$

sont linéairement indépendants et calculer les coordonnées de $v = (7, 14, -1, 2)$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exercice 2 Dans l'espace $\mathbf{C}^3$, vérifier que les vecteurs

$$u_1 = (1, -1, i), \quad u_2 = (1, -1, 1) \quad \text{et} \quad u_3 = (i, 1, -1)$$

forment une base et calculer les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 3

1. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par

$$v_1 = (1, -1, 3, 2), \quad v_2 = (3, -1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, -6, -3) \quad \text{et} \quad v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

   (a) Déterminer la dimension de F et en donner une base.
   (b) Donner un système d'équations cartésiennes de F.

2. Soit
$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}.$$
   Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et donner une base de G.

3. Montrer que $F \subset G$. A-t-on $F = G$?

Exercice 4 Déterminer une base sur $\mathbf{R}$ pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.

1. $\text{Vect}((1, 2, 1), (0, 1, 3), (2, 2, -4)) \subset \mathbf{R}^3$
2. $\text{Vect}((1, 3, 0), (2, 3, -3)) \cap \text{Vect}((1, 1, -3), (1, 4, 3)) \subset \mathbf{R}^3$
3. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$

Exercice 5 Déterminer une base sur $\mathbf{C}$ pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.

1. $\text{Vect}((2 + i, 1 + i, i), (1 + 3i, 2i, -1 + 2i)) \subset \mathbf{C}^3$
2. $\text{Vect}((1, 0, i), (0, 1 + i, 1 - i)) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3 \mid (4 + i)x_1 - x_2 = 0\} \subset \mathbf{C}^3$

Exercice 6 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, donner une base de F et sa dimension dans les cas suivants :

1. $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$
2. $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1 + x_n = x_2 + x_n = \ldots + x_n = x_{n-1} + x_n = 0\}$

Exercice 7 Dans $\mathbf{R}[X]$, vérifier si nécessaire que les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F_1 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(X) = aX^2 + bX(X - 7) + c \}$
2. $F_2 = \text{Vect}(X, X(X + 1), X + 1)$

3. $F_3 = \text{Vect}((X-1)^2, X^2-1, X+1, X-1)$
4. $F_4 = \{P \in \mathbf{R}[X]_{\leq n} \mid P(X) \text{ multiple de } (X^2+1)\}$

Exercice 8 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]_{\leq 3}$, On considère les quatre polynômes :

$$P_1(X) = 6 - X^3, \quad P_2(X) = X^3 - 2X^2 - 2X, \quad P_3(X) = X^2 - 3X + 1, \quad P_4(X) = X^3 - X^2 - 4.$$

1. Soit $F = \{P \in E \mid P(0) + P'(0) + P''(0) + P'''(0) = 0\}$. Montrer que $F \neq E$ et vérifier que les quatre polynômes précédents sont dans F.
2. le système (P_1, P_2, P_3, P_4) est-il libre?
3. Le système (P_1, P_2, P_3, P_4) est-il unsystème générateur de E ?
4. le système (P_1, P_2, P_3, P_4) est-il une base de F ?

Exercice 9 Montrer que les polynômes

$$P_1(X) = X(X-1)(X-2), \quad P_2(X) = X(X-1)(X-3),$$

$$P_3(X) = X(X-2)(X-3) \quad \text{et} \quad P_4(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$$

forment une base de $\mathbf{R}[X]_{\leq 3}$. Exprimer dans cette base le polynôme P tel que $P(0) = 3$, $P(1) = -2$, $P(2) = 5$, $P(3) = 7$.

Exercice 10 Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \alpha & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & \beta & \beta \\ 3 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 3 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

où α et β sont des paramètres.

Exercice 11 Soit $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ où a et b désignent deux réels.

1. Montrer qu'on a $2 \leq \text{rg } A \leq 3$.
2. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\text{rg } A = 2$?

Exercice 12 Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le noyau et l'image de f.
2. Quel est le rang de f?
3. Calculer la matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $f^2 - 3f = 0$.
4. M est-elle inversible?