Feuille 4: Corrigé d'exercices

October 31, 2018

Ok c'est parti. Voici quelques exercices corrigés, mais ce serait mieux que vous (re)fassiez vous-même, puis vous comparez avec les miens.

Exercice 1.

• Pratiquons l'algorithme de GJ pour la matrice formée par les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cela implique $rang(FREL(u_1, u_2, u_3, u_4)) = 4$, d'où la famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$, donc elle forme une base de $\mathbb{R}^4$.

• **Remarque** Puisque u_1, u_2, u_3, u_4 forme une base de $\mathbb{R}^4$, chaque vecteur de $\mathbb{R}^4$ peut s'écrire (de manière unique) comme combinaison des vecteurs dans cette base.

Supposons que $v = xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. ceci implique que (x, y, z, t) est solution du système linéaire (non-homogène):

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ -x + 0.y - z + t = -1 \\ -2x - y + 0.z + 4t = 2 \end{cases}$$

Pratiquons l'algorithme de GJ pour la matrice augmentée associée (les étapes et calculs sont les mêmes que précédents, la seule différence c'est qu'on y ajoute le vecteur v)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 14 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 16 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Cela implique que $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=2 \\ t=1 \end{cases}$. Donc $v = 0.u_1 + 2.u_2 + 2.u_3 + 1.u_4$, autrement dit, $(0,2,2,1)$ sont des coordonnées de v dans la base u_1, u_2, u_3, u_4.

Exercice 3. 1. $F = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$

(a) F est engendré par ces 4 vecteurs, donc la dimension de F est le nombre maximal de vecteurs dans la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) qui sont libres. (donc ils engendrent F). Pratiquons GJ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 & -9 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 2 pivots se trouvant à deux premières colonnes, il s'ensuit que v_1, v_2 sont indépendants et v_3, v_4 sont redondants, plus concrètement, $v_3 = -2v_1 + v_2$, $v_4 = -3v_1 + v_2$. D'où $F = Vect(v_1, v_2)$ et v_1, v_2 forment une base de F et $\dim F = 2$.

(b) Puisque v_1, v_2 est une base de F, un vecteur v de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbb{R}^4$ appartient à F si et selement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha.v_1 + \beta v_2$. Cela implique que (α, β) est solution du système linéaire:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = x_1 \\ -\alpha - \beta = x_2 \\ 3\alpha + 0.\beta = x_3 \\ 2\alpha + \beta = x_4 \end{cases}$$

Pratiquons GJ:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ -1 & -1 & x_2 \\ 3 & 0 & x_3 \\ 2 & 1 & x_4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ 0 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & -9 & -3x_1 + x_3 \\ 0 & -5 & -2x_1 + x_4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & \frac{x_1+x_2}{2} \\ 0 & -9 & -3x_1 + x_3 \\ 0 & -5 & -2x_1 + x_4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2) \\ 0 & 1 & \frac{x_1+x_2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{9}{2}(x_1 + x_2) - 3x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}(x_1 + x_2) - 2x_1 + x_4 \end{array}\right)$$ Cela implique que

$$\begin{cases} \alpha = x_1 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2) \\ \beta = \frac{x_1+x_2}{2} \\ 0 = \frac{9}{2}(x_1 + x_2) - 3x_1 + x_3 \\ 0 = \frac{5}{2}(x_1 + x_2) - 2x_1 + x_4 \end{cases}$$

D'où, si le vecteur $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$, alors ses coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 sont vérifiées les équations suivantes:

$$\begin{cases} 0 = \frac{9}{2}(x_1 + x_2) - 3x_1 + x_3 \\ 0 = \frac{5}{2}(x_1 + x_2) - 2x_1 + x_4 \end{cases}$$

Ce sont des équations cartésiennes déterminant le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$.

2. G est le noyau d'un système linéaire **homogène** dans $\mathbb{R}^4$, donc il est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

   • Un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartient à G si et selement si

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0$$

   D'où l'on peut exprimer un coordonnée en fonction des autres, par example $x_1 = x_2 - 2x_3 + 4x_4$. Par suite:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 + 4x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}$$
$$= x_2. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3. \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4. \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Il s'ensuit que chaque vecteur de G est combinaison linéaire des vecteurs $w_1 = (1, 1, 0, 0), w_2 = (-2, 0, 1, 0), w_3 = (4, 0, 0, 1)$, autrement dit, $G = Vect(w_1, w_2, w_3)$.
   Montrons que w_1, w_2, w_3 est une famille libre. En effet, supposons qu'il y a une combinaison de $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x.w_1 + y.w_2 + z.w_3$, alors on obtient un système:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

   Par conséquent, w_1, w_2, w_3 est une famille libre, elle est génératrice de G donc elle forme une base de G et $\dim G = 3$.

3. • Rappelons que $F = Vect(v_1, v_2)$, donc pour montrer que $F \subset G$, il suffit de montrer que $v_1, v_2 \in G$, mais cela est évidente car $v_1 = (1, -1, 3, 2)$ et $v_2 = (3, -1, 0, 1)$ véfifient

l'équation $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0$ de G.

• Par contre $F \neq G$, en effet, le vecteur $v = (1, 1, 0, 0)$ appartient à G: v satisfait l'équation de G, mais il ne satisfait pas les équations de F $\begin{cases} 0 = \frac{9}{2}(x_1 + x_2) - 3x_1 + x_3 \\ 0 = \frac{5}{2}(x_1 + x_2) - 2x_1 + x_4 \end{cases}$,
d'où $v = (1, 1, 0, 0)$ n'appartient pas à F

Remarque: on peut raisonner comme suit: l'espace F et G sont de dimensions différentes: $\dim F = 2$ alors que $\dim G = 3$, donc $F \neq G$.