Géométrie différentielle. Feuille de TD 4: Courbes

Exercice 1 Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée définie par

$$h(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)\,.$$

a) Est-elle régulière ? Birégulière ?
b) Trouvez un paramétrage normal de la courbe vérifiant $\gamma(0) = h(0)$ et $\gamma'(0)$ de même sens que $h'(0)$
c) Calculer la courbure et la torsion, le plan osculateur, le centre de courbure, en un point de la courbe.
d) Calculer la longueur de la courbe $h_{|[0,1]}$.

Exercice 2 **a)** Donnez une courbe paramétrée la plus simple possible dont l'image soit la parabole d'équation $y = x^2$.
b) Donnez un paramétrage normal.
c) Calculez courbure, centre de courbure, cercle osculateur.
d) En quel(s) point(s) la courbe traverse-t-elle son cercle osculateur ?

Exercice 3 **a)** Donner un paramétrage du mouvement d'un point $M(t)$ d'un rayon d'une roue de vélo de rayon R qui roule sans glisser à vitesse constante v, lorsque $M(t)$ est à distance constante $0 \leq r \leq R$ du centre de la roue.
b) Lorsque c'est possible, donner un paramétrage normal, puis calculer courbure, longueur, centre de courbure, cercle osculateur.

Exercice 4 (Construction d'une courbe plane dont la courbure est prescrite) Soit $\kappa : I \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, et $0 \in I$. Nous allons montrer que pour toute condition initiale fixée $(x_0, v_0, n_0) \in (\mathbb{R}^2)^3$, il existe une unique courbe $c : I \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $c(0) = x_0$, $c'(0) = v_0$ et $c''(0) = n_0$.
a) Résoudre le système différentiel $c(0), v(0) = v_0, \kappa(0) = n_0$ et

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix}$$

où $c, v, n : I \to \mathbb{R}^2$. **b)** En déduire le résultat énoncé ci-dessus.
c) En déduire que les courbes à courbure nulle sont les courbes dont l'image est une droite.

Exercice 5 (Construction d'une courbe dont la courbure et la torsion sont prescrites) Enoncer puis démontrer le résultat analogue pour les courbes de $\mathbb{R}^3$.
En déduire que les courbes à torsion nulle sont les courbes planes.

Courbes paramétrées en L1

Plan d'étude d'une courbe :

Étape 0 : Trouver un paramétrage de la courbe..
Lorsqu'elle est définie comme description du mouvement d'un point mobile, ou comme solution d'un problème mathématique, par exemple un problème de lieux de points, ou un système d'équations différentielles, ou ...
Étape 1 : Déterminer un domaine d'étude le plus petit possible
On étudie la périodicité et les symétries de la courbe.

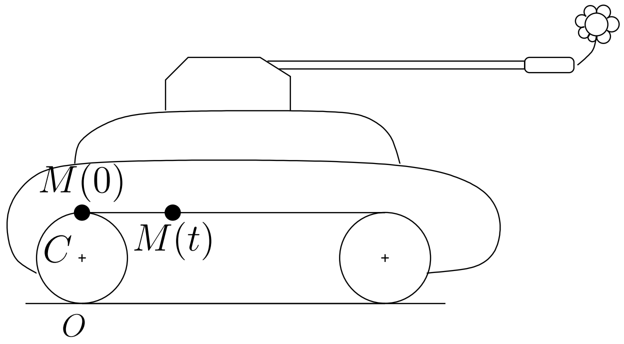
Étape 2 : Faire le tableau de variation simultané des deux fonctions coordonnées
- On cherche d'abord quels sont les points où la courbe n'est pas dérivable.
- On fait ensuite le tableau de variation des deux fonctions coordonnées, avec sur la première ligne x' puis x puis y puis y' ce qui permet de lire x et y en même temps. Dans ce tableau, on note bien les *points singuliers* (tels que $\overrightarrow{c'(t)} = \vec{0}$, ie $x'(t) = y'(t) = 0$), les *variations* et *extrema* des fonctions coordonnées x et y.

Étape 3 : Étudier la courbe localement en tous les points qui ne sont pas biréguliers.
- On cherche d'éventuelles tangentes aux points non réguliers trouvés à l'étape précédente (dans ce cas vous serez guidés)
- On cherche les points non biréguliers (tels que $\det(c'(t), c''(t)) = 0$).
- On pousse l'étude plus loin et on cherche les points d'inflexion et les points de rebroussement parmi les points non biréguliers. Cette étude peut mener à des calculs longs, à faire calmement. Dans les cas où les calculs sont difficiles à mener à bout, vous aurez soit des indications, soit l'aide de Maple.

Étape 4 : Étudier les branches infinies
- On cherche en quel(s) point(s) la courbe admet des branches infinies, et on étudie leur type: existence éventuelle d'asymptotes, branches paraboliques ...
- Lorsqu'il y a une droite asymptote, on cherche la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Étape 5 : Tracer la courbe
Placer les points singuliers, les points d'inflexion, les points de rebroussements, les points correspondant aux extrema des fonctions coordonnées ainsi que les tangentes à la courbe en tous ces points. Tracer les asymptotes s'il y en a. Placer les points doubles s'il y en a. Tracer la courbe sur le domaine d'étude. Compléter le tracé par symétrie, translation ou périodicité (cf étape 1).

Exercice 6 On considère un char qui se déplace à vitesse constante $v > 0$ le long de l'axe $(0x)$. On veut étudier le mouvement du point $M(t)$ de la chaîne qui se trouve au dessus du centre de la roue arrière à l'instant $t = 0$. Étudiez qualitativement et tracez approximativement sa trajectoire (sans calculs, en vous aidant de l'exemple de la roue de vélo traité en cours) pendant deux tours complets de la chaîne, en considérant successivement ses mouvements lorsque :
- il est sur la partie supérieure de la chaîne,
- il « tourne » autour de la roue avant du char,
- il est sur la partie inférieure de la chaîne,
- il « remonte » autour de la roue arrière.



Exercice 7 On considère une grande roue fixe de rayon R, de centre $O = (0, 0)$ et une petite roue de rayon $0 < r \leq R$ qui roule sans glisser sur le bord extérieur de la grande roue. On note $C(t)$ la position du centre de la petite roue à l'instant t, et $M(t)$ celle du point du bord qui est en haut à l'instant $t = 0$ ($M(0) = (0, R + 2r)$). Donnez un paramétrage du mouvement de $M(t)$ au cours du temps t (on suppose que $C(t)$ fait ω tours de grande roue par minute, et tourne donc d'un angle $2\pi\omega$ par minute).
Indication : introduisez le point $P(t)$ de contact entre les deux roues à l'instant t et décrivez d'abord son mouvement. On ne demande pas d'étudier la courbe obtenue comme mouvement du point $M(t)$ (voir exercice **??***), mais seulement de donner un paramétrage.*

Les courbes obtenues dans cet exercice pour les différentes valeurs de $0 \leq r \leq R$ sont appelées des *épicycloïdes*.

Exercice 8 Même exercice, mêmes notations, mais on suppose cette fois que la petite roue roule sans glisser à l'intérieur de la grande.

Exercice 9 On considère le mouvement d'une échelle de longueur $l > 0$, qui à l'instant $t = 0$ est adossée à un mur vertical, et qui se met à glisser. On note $H(t)$, $B(t)$ et $M(t)$ les positions respectives à l'instant t du haut, du bas et du milieu de l'échelle. On suppose que $B(t)$ se déplace à vitesse constante $v > 0$ le long de l'axe $(0x)$. Vérifiez que $H(t)$ ne se déplace pas à vitesse constante, puis donnez un paramétrage des mouvements de $H(t)$, $B(t)$ et $M(t)$ au cours du temps t. Quelles sont leurs trajectoires?

Exercice 10 Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R, et I le point de coordonnées $(a, 0)$. La *podaire* de $\mathcal{C}$ par rapport à I est l'ensemble des pieds des perpendiculaires issues de I sur toutes les tangentes à $\mathcal{C}$. Donnez un paramétrage de la courbe obtenue lorsque $a = R$ (la courbe est une *cardioïde*), puis étudiez cette courbe. Mêmes questions pour $a = 2R$ (*limaçon à boucle*) et $a = \frac{R}{2}$ (*limaçon sans boucle*).

Exercice 11 (La spirale logarithmique) Étudiez la courbe paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto (e^t \cos t, e^t \sin t)$, et donnez l'équation de sa tangente en $t_0 = \frac{3\pi}{4}$. *Indication: montrez que vous pouvez étudier la courbe sur $[0, \pi]$, puis récupérer le tracé sur tout $\mathbb{R}$, par une transformation géométrique que vous préciserez.*

Exercice 12 (La strophoïde droite) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $C(1, 0)$ et de rayon 1, et Δ la droite d'équation $x = 1$. On considère une droite d non verticale de pente $t = \tan\theta \in \mathbb{R}$ passant par l'origine. On note A le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec d, B celui de d avec Δ, et M le point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Paramétrez en fonction de $t \in \mathbb{R}$, puis étudiez la courbe décrite par les points M lorsque la droite d varie (sans être verticale).

Exercice 13 (La conchoïde de Nichomède) Soit Δ la droite d'équation $x = 1$, et d une droite non verticale de pente $\tan\theta$ (avec $\theta \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) passant par l'origine. On note A le point d'intersection de d et Δ et M le point de d à distance 2 de A et tel que $A \in [0M]$. Paramétrez en fonction de $\theta \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la courbe décrite par l'ensemble des points M quand d varie. Étudiez cette courbe.