

**Feuille 4 : Dimension, rang, bases**  
**Semaines du 1 au 5 et du 8 au 12 octobre**

**Plan de travail de la semaine, en cours, en TD, et à la maison :**

- Relisez bien sûr le cours d'amphi, avant chaque TD et chaque cours, et notez des questions à poser.
- En TD, semaines 4 et 5, faites au minimum les exercices 1 à 8 si possible. Sinon, finissez les chez vous.
- Si vous avez fini, continuez la feuille, finissez-la chez vous si vous le pouvez.

**Exercice 1** Dans l'espace  $\mathbf{R}^4$ , vérifier que les vecteurs

$$u_1 = (1, 2, -1, -2), \quad u_2 = (2, 3, 0, -1), \quad u_3 = (1, 3, -1, 0) \quad \text{et} \quad u_4 = (1, 2, 1, 4)$$

sont linéairement indépendants et calculer les coordonnées de  $v = (7, 14, -1, 2)$  dans la base  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ .

**Exercice 2** Dans l'espace  $\mathbf{C}^3$ , vérifier que les vecteurs

$$u_1 = (1, -1, i), \quad u_2 = (1, -1, 1) \quad \text{et} \quad u_3 = (i, 1, -1)$$

forment une base et calculer les coordonnées de  $v = (1 + i, 1 - i, i)$  dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$ .

**Exercice 3** 1. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$  engendré par

$$v_1 = (1, -1, 3, 2), \quad v_2 = (3, -1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, -6, -3) \quad \text{et} \quad v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

- (a) Déterminer la dimension de  $F$  et en donner une base.
- (b) Donner un système d'équations cartésiennes de  $F$ .

2. Soit

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}.$$

Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^4$  et donner une base de  $G$ .

3. Montrer que  $F \subset G$ . A-t-on  $F = G$  ?

**Exercice 4** Déterminer une base sur  $\mathbf{R}$  pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.

1.  $\text{Vect}((1, 2, 1), (0, 1, 3), (2, 2, -4)) \subset \mathbf{R}^3$
2.  $\text{Vect}((1, 3, 0), (2, 3, -3)) \cap \text{Vect}((1, 1, -3), (1, 4, 3)) \subset \mathbf{R}^3$
3.  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$

**Exercice 5** Déterminer une base sur  $\mathbf{C}$  pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.

1.  $\text{Vect}((2 + i, 1 + i, i), (1 + 3i, 2i, -1 + 2i)) \subset \mathbf{C}^3$
2.  $\text{Vect}((1, 0, i), (0, 1 + i, 1 - i)) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3 \mid (4 + i)x_1 - x_2 = 0\} \subset \mathbf{C}^3$

**Exercice 6** Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ , donner une base de  $F$  et sa dimension dans les cas suivants :

1.  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$
2.  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + x_n = x_2 + x_{n-1} = \dots = x_{n-1} + x_n = 0\}$

**Exercice 7** Dans  $\mathbf{R}[X]$ , vérifier si nécessaire que les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1.  $F_1 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(X) = aX^2 + bX(X - 7) + c\}$
2.  $F_2 = \text{Vect}(X, X(X + 1), X + 1)$
3.  $F_3 = \text{Vect}((X - 1)^2, X^2 - 1, X + 1, X - 1)$

4.  $F_4 = \{P \in \mathbf{R}[X]_{\leq n} \mid P(X) \text{ multiple de } (X^2 + 1)\}$

**Exercice 8** Dans l'espace vectoriel  $E = \mathbf{R}[X]_{\leq 3}$ , On considère les quatre polynômes :

$$P_1(X) = 6 - X^3, \quad P_2(X) = X^3 - 2X^2 - 2X, \quad P_3(X) = X^2 - 3X + 1, \quad P_4(X) = X^3 - X^2 - 4.$$

1. Soit  $F = \{P \in E \mid P(0) + P'(0) + P''(0) + P'''(0) = 0\}$ . Montrer que  $F \neq E$  et vérifier que les quatre polynômes précédents sont dans  $F$ .
2. le système  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  est-il libre?
3. Le système  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  est-il un système générateur de  $E$  ?
4. le système  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  est-il une base de  $F$  ?

**Exercice 9** Montrer que les polynômes

$$P_1(X) = X(X - 1)(X - 2), \quad P_2(X) = X(X - 1)(X - 3),$$

$$P_3(X) = X(X - 2)(X - 3) \quad \text{et} \quad P_4(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$$

forment une base de  $\mathbf{R}[X]_{\leq 3}$ . Exprimer dans cette base le polynôme  $P$  tel que  $P(0) = 3, P(1) = -2, P(2) = 5, P(3) = 7$ .

**Exercice 10** Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \alpha & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & \beta & \beta \\ 3 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 3 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres.

**Exercice 11** Soit  $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  où  $a$  et  $b$  désignent deux réels.

1. Montrer qu'on a  $2 \leq \text{rg } A \leq 3$ .
2. Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  a-t-on  $\text{rg } A = 2$ ?

**Exercice 12** Notons  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbf{R}^3$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^3$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le noyau et l'image de  $f$ .
2. Quel est le rang de  $f$ ?
3. Calculer la matrice de  $f^2 = f \circ f$  dans la base  $\mathcal{B}$  et montrer que  $f^2 - 3f = 0$ .
4.  $M$  est-elle inversible?