Feuille 3: Corrigé d'exercices

October 29, 2018

Exercice 1. Théorème: Une famille de k vecteurs $(v_1, v_2, ..., v_k)$ dans $\mathbb{R}^n$ est libre si et selement si $rang(FREL(v_1, v_2, ..., v_k)) = k$. Elle est génératrice de $\mathbb{R}^n$ si et selement si $rang(FREL(v_1, v_2, ..., v_k)) = n$.

(a) Pratiquons l'algorithme de GJ pour la matrice suivante:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Cela implique $rang(FREL(u_1, u_2, u_3)) = 3$, donc la famille est libre et génératrice d'après le théorème.

(b) Pratiquons GJ:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
il y a 2 pivots dans la forme réduite, donc $rangFREL(v_1, v_2, v_3)) = 2 \neq 3$, donc la famille n'est pas libre, ni génératrice.
Remarque: On peut constater immédiatement que $v_3 = v_1 + v_2$, donc v_3 est redondant, cela implique que la famille n'est pas libre par définition.

(c) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Il y a 3 pivots $\Rightarrow rang(FREL(w_1, w_2, w_3, w_4)) = 3$ d'où la famille n'est pas libre, ni génératrice de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 2. (a) C'est évident que les vecteurs sont vérifiés l'équation de F, donc il appartiennet à F.

(b) Pratiquons GJ:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3 pivots $\Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ est libre.

(c) On peut pratiquer l'algorithme GJ comme ci-dessus (même étapes et calculs), mais pour la famille de 4 vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) pour voir que cette famille (en ajoutant v_4 à la famille libre (v_1, v_2, v_3)) n'est plus libre.

On pourrait raissoner par supposer le contraire, que (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre, cela implique que $rang(FREL(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, d'où elle est aussi génératrice de $\mathbb{R}^4$, c'est à dire $\mathbb{R}^4 = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Or, d'après (a) $v_1, v_2, v_3, v_4 \in F \Rightarrow Vect(v_1, v_2, v_3, v_4) \subset F$ et donc $\mathbb{R}^4 \subset F$, par contre évidement $F \subset \mathbb{R}^4$, il s'ensuit que $F = \mathbb{R}^4$, contradiction, car le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^4$ n'appartient pas à F. Cela implique que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas libre.

(d) Non,car d'après (b), $rang(FREL(v_1, v_2, v_3)) = 3 \neq 4$

(e) Non: -si vous pratiquez déjà GJ en question c, vous pouvez donc constater que $rang(FREL(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 3 \neq 4$ donc elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$.
- Sinon, vous pourriez raisonner par supposer le contraire comme en question (c).

Exercice 3. (b) Pratiquons l'algorithme de GJ:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3 pivots se trouvant aux 3 premières colonnes $\Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ n'est pas libre (mais cela montre également que (v_1, v_2, v_3) est libre !

(c) D'après les calculs précédents, $rang(FREL(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3 \neq 4$, cela implique que cette famille n'est pas libre.

(d) - De même, $rang(FREL(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3$ donc (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$.
- Un vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ appartient à F si et selement si $x + y + z + t = 0 \Rightarrow x = -y - z - t$ et donc on peut réécrire:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z-t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = -y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} -$$
$$z.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - t.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -y.v_1 - z.v_2 - t.v_3 + 0.v_4$$

Il s'ensuit que v_1, v_2, v_3, v_4 est une famille génératrice de F

(d) Non, car $rang(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3 \neq 4$ donc elle n'est pas libre et ne forme pas une base de F, ni $\mathbb{R}^4$.
Remarque: Par contre la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de F, car elle est libre ($rang(FREL(v_1, v_2, v_3) = 3)$ et génératrice de F (voir les calculs en question c).

Exercice 11. (a) Notons $S_1 = Vect(u_1, u_2)$, $S_2 = Vect(v_1, v_2)$. On va montrer que $S_1 = S_2$: en écrivant u_1, u_2 comme combinaisons de v_1, v_2.
Supposons que $u_1 = x.v_1 + y.v_2$, cela implique un système linéaire:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ \quad -y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Résolvons ce système (en pratiquant GJ, ou bien c'est facile à voir) qu'on a l'unique solution: $x = 5, y = -2$. Il s'ensuit que $u_1 = 5.v_1 - 2v_2$, donc u_1 est combinaison de v_1, v_2 donc $u_1 \in S_1$.
Remarquons que $u_2 = v_2$, donc $u_2 \in S_2$. Finalement

$$u_1, u_2 \in S_2 \Rightarrow S_1 = Vect(u_1, u_2) \subset S_2 \ \ (1)$$

D'autre part, $u_1 = 5v_1 - 2v_2 = 5v_1 - 2u_2 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{5}(u_1 + 2u_2)$.D'où v_1 est combinaison de u_1, u_2 donc $v_1 \in S_1$. Enfin,

$$v_1, v_2 = u_2 \in S_1 \Rightarrow S_2 = Vect(v_1, v_2) \subset S_1 \ \ (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow S_1 = S_2$.

(b) Le but de cette question est de déterminer les équations cartésiennes d'un sous espace vectoriel engendré par les vecteurs donnés (Regardez également EXo 3.1(b) de TD4). Remarquons qu'un vecteur $(x, y, x) \in \mathbb{R}^3$ appartient à S_1 si et selement si il est combinaison de u_1, u_2:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cela donne un système linéaire: $\begin{cases} x+2.y=\alpha \\ 2.x-\quad y=\beta \\ 3.x+\quad y=\gamma \end{cases}$ Pratiquons l'algorime GJ:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & \alpha \\ 2 & -1 & \beta \\ 3 & 1 & \gamma\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & \alpha \\ 0 & -5 & \beta-2\alpha \\ 0 & -5 & \gamma-3\alpha\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & \frac{\beta-2\alpha}{-5} \\ 0 & -5 & \gamma-3\alpha\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & \frac{\beta-2\alpha}{-5} \\ 0 & 0 & 5.\frac{\beta-2\alpha}{-5}+\gamma-3\alpha\end{array}\right)$$

Cela implique que

$$5.\frac{\beta-2\alpha}{-5}+\gamma-3\alpha=0.x+0.y=0 \Leftrightarrow \gamma-\beta-\alpha=0$$

Il s'ensuit que $(\alpha,\beta,\gamma)\in S_1 \Leftrightarrow \gamma-\beta-\alpha=0$. D'où l'équation cartésiennes de S_1 est

$$\gamma-\beta-\alpha=0$$

De même manière, on peut trouver l'éqution de S_2 est $\gamma-\beta-\alpha=0$. Finalement $S_1=S_2$ car ils sont déterminés de la même éqution $\gamma-\beta-\alpha=0$.