Feuille de TD 3 : Sous-espaces vectoriels , combinaisons linéaires, familles libres et génératrices

Plan de travail de la semaine, en cours, en TD, et à la maison :

- Relisez bien sûr le cours d'amphi, avant chaque TD et chaque cours, et notez des questions à poser.
- En TD, faites au minimum les exercices 1 à 4 si possible. Sinon, finissez les chez vous.
- Si vous avez fini, continuez la feuille, finissez-la chez vous si vous le pouvez.

Exercice 1 Les familles suivantes sont-elles libres ? Et/ou génératrices ?
a) $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 2, 2)$, $u_3 = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$
b) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$
c) $w_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $w_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $w_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$, $w_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 0, -3, -1)$, $v_3 = (-2, -4, 2, 1)$ et $v_4 = (3, 6, 0, 2)$.
a) Les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 appartiennent-ils au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y = 2x\}$
b) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
c) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
d) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
e) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)$, et $v_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
a) Vérifier qu'ils appartiennent au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$.
b) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
c) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? De F ?
d) Cette famille forme-t-elle une base de F ?

Exercice 4 Sur une feuille de papier quadrillée, dessinez trois vecteurs dont les extrémités sont des sommets du quadrillage, puis trouvez une relation de dépendance linéaire entre eux.

Exercice 5 **a)** Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^3$. La famille (u_1, u_3) est-elle libre ?
b) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^3$ et $v \in \mathbb{R}^3$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle génératrice ?
c) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle génératrice ?
d) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle libre ?

Exercice 6 Soient u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires deux à deux. La famille (u, v, w) est-elle libre ? Pourquoi ?

Exercice 7 Soient $u_1 = (3, 1, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 2)$, $u_3 = (1, -1, 1)$ et $u_4 = (5, -2, 3)$. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ? Si oui, démontrez le, sinon, écrivez une relation de liaison.

Exercice 8 Dans $\mathbb{C}^3$, on considère la famille des trois vecteurs $u_1 = (1, -1, i)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (i, 1, -1)$. Cette famille est-elle libre ? Génératrice ? Si oui, écrire les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans la base u_1, u_2, u_3.

Exercice 9 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ainsi que les familles $F_1 = \{v_1\} \quad F_2 = \{v_1, v_2\} \quad F_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$. On considère les vecteurs suivants

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Est-ce que le vecteur w_1 (resp. w_2, resp. w_3) est une combinaison linéaire de vecteurs de F_1, F_2, ou F_3 ?
b) Déterminer les sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3 engendrés respectivement par v_1, v_2, v_3.
c) Déterminer toutes les manières d'écrire le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.

Exercice 10 Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$.
a) Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
b) En donner des familles génératrices.
c) Est-ce encore vrai pour l'ensemble $\mathcal{T}$ des solutions de l'équation $x - y + z = 1$?

Exercice 11 Soient $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (2, -1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (2, -1, 1)$. Montrer que le sous-espace engendré par u_1 et u_2 coincide avec le sous-espace vectoriel engendré par v_1 et v_2, de deux manières.
a) En écrivant u_1 et u_2 chacun comme combinaison linéaire de v_1 et v_2.
b) En trouvant des équations pour chacun de ces deux sous-espaces.
c) Soient P_1 le plan paramétré par $P_1 = \{(\lambda, \mu, \lambda+\mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ et $P_2 = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda-\mu, 3\lambda+\mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Comparez ces deux plans.

Exercice 12 Montrer que $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (-1, 1)$ engendrent $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13 Montrer que les vecteurs $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (-1, 1, 0)$, et $f_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire chacun des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, et $e_3 = (0, 0, 1)$ comme combinaison linéaire de f_1, f_2, f_3.

Exercice 14 Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\vec{v}_1 = (2, 3, -1)$ et $\vec{v}_2 = (1, -1, 2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs $\vec{u}_1 = (3, 7, 0)$ et $\vec{u}_2 = (5, 0, -7)$.

Exercices sur les sous-espaces vectoriels

Exercice 15 Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels de E. Comparer $F \cap G$, $F \cap H$, et $F \cap (G + H)$.

Exercice 16 **a)** Soient f, g deux applications linéaires de E dans E. Montrer que $Im(f \circ g) \subset Im(f)$. Donner un exemple où l'inclusion n'est pas une égalité et un exemple où c'est une égalité.
b) De même, montrer que $Ker(f \circ g) \supset Kerg$, et donner des exemples où l'inclusion est/n'est pas une égalité.
c) Montrer que si $f \circ g = Id_E$, alors $Ker(g) = \{0\}$ et $Im(f) = E$.

Exercice 17 (Projecteurs) **a)** On suppose que l'espace vectoriel E s'écrit comme somme directe $E = F \oplus G$, où F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Tout élément $u \in E$ s'écrit de manière unique $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Soit $p_F : u \to u_F$ la *projection sur F parallèlement à G*. Montrer que $p_F \circ p_F = p_F$. On appelle *projecteur linéaire* une application linéaire vérifiant cela ($f \circ f = f$).
b) Soit $p : E \to E$ un projecteur linéaire, i.e. une application linéaire telle que $p \circ p = p$. Montrer qu'alors $E = F \oplus G$, avec $F = Kerp$ et $G = Imp$ et p est la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 18 (Symétries) **a)** Soit s une application linéaire de E dans E telle que $s \circ s = Id$. Soit $F = Ker(s - Id_E)$ et $G = Ker(s + Id_E)$. Montrer que $E = F \oplus G$.
b) Soit s une réflexion orthogonale par rapport à un plan vectoriel P de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que $s \circ s = Id_E$. Qui sont dans ce cas F et G ?
c) Même question avec une réflexion par rapport à une droite de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 19 Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$ et $F_1 = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0)$ sont-ils supplémentaires ? Pourquoi ?
Même question avec $E_2 = \{(3t, 3t, t), t \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(2u + v, u + 2v, u), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.
Même question avec $E_3 = \{(2u + v, u + 2v, u + v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ et $F_3 = \{(u + v, u + v, 2u), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 20 Donnez deux supplémentaires distincts de $\mathbb{R}.(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Un dessin sera bienvenu.

Exercice 21 Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, et $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $\varphi(u) \neq 0$. Montrer que $\mathbb{R}^n = Ker\varphi \oplus \mathbb{R}.u$