Géométrie différentielle. Feuille de TD 3 : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 (Quadriques) Montrer que les ensembles suivants sont des sous-variétés, tracez les, et donnez leurs espaces tangents.

1. $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$ où $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ sont des réels fixés.
2. $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = x^2 + y^2\}$
3. $\mathcal{P}_H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = x^2 - y^2\}$
4. $\mathcal{H}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z^2 = x^2 + y^2 - 1\}$
5. $\mathcal{H}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$

Exercice 2 L'application $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto (\sin t \cos^2 t, \sin^2 t \cos t)$ est-elle une immersion ? est-elle injective ? Est-elle un plongement ? Son image est-elle une sous-variété ?

Exercice 3 Soit M_1 et M_2 des sous-variétés de dimension d_i, de classe C^{k_i} de $\mathbb{R}^{n_i}$.
a) Le produit $M_1 \times M_2$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$?
b) À quelle(s) condition(s) l'union $M_1 \cup M_2$ est-elle une sous-variété ?
c) Même question avec l'intersection.

Exercice 4 (Tores) **a)** On considère l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(\theta, \varphi) \mapsto ((2+\cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta))$ Montrez que son image T est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ que vous dessinerez.
b) Soit $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$. Montrez que c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$.
c) Montrez que les deux tores sont difféomorphes.
d) Trouvez une équation de T.

Exercice 5 (groupes de Lie) Pour chacun des groupes suivants, démontrez qu'il s'agit d'une sous-variété de dimension d et de classe C^k d'un certain $\mathbb{R}^n$. Précisez d, k, n, et donnez son espace tangent en l'identité.

- $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1\}$
- $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = I\}$
- $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = I \quad \text{et} \quad \det A = 1\}$
- $SO(p,q) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tJ_{p,q}A = 1, \quad \text{where} J_{pq} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$
- $SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), \det A = 1\}$ (on identifiera d'abord $\mathbb{C}$à $\mathbb{R}^2$ de sorte à plonger $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_{2n}(\mathbb{R})$)
- $U(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), {}^*AA = I\}$

Exercice 6 (Surface de Véronèse) Montrer que l'image de la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ par l'application $(x,y,z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, yz, xz, xy)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$.

Exercice 7 (Hélicoïde) Représenter l'image de l'application $(\theta, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (t\cos\theta, \sin\theta, \theta) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Vous pourrez pour cela chercher une équation de son image.