Feuille 2: Corrigé d'exercices

October 31, 2018

Example du CM: Résoudre le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x_3 - x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 6 \end{cases}$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

Pratiquons l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient successivement:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cela implique $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_5 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = 2 \quad + \quad x_4 \\ x_5 = -2 \end{cases}$

Le système a une infinité de solutions, en choisissant librement x_2 et x_4 et exprimer x_1, x_3 comme ci-dessus.

Exercice 1.

(a) Écrivons le système sous la forme matricille:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Puis pratiquons l'algorithme de Gauss-Jordan pour la matrice augmentée du système ci-dessus (rappelons elle est de taille 2×4):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

on obtient:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 \\ 0 & 1 & 8 & -8 \end{array}\right)$$

Cela signifie:
$\begin{cases} x - 10z = 13 \\ y + 8z = -8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 13 + 10z \\ y = -8 - 8z \end{cases}$
Le système a une infinité de solutions satisfaisant $x = 13 + 10z, y = -8 - 8z$.

(b) Pratiquons l'algorithme de Gauss-Jordan pour la matrice augmentée:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 8 \\ 6 & 8 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 6 & 8 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
Cela implique:

$$\begin{cases} x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{8}{3} \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{cases}$$

D'où le système n'a pas de solution.

(d) Pratiquons l'algorithme de Gauss-Jordan pour la matrice augmentée:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

On obtient successivement:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cela implique $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ Le système a l'unique solution $(x, y) = (2, -1)$.

(e) Pratiquons l'algorithme de Gauss-Jordan pour la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On obtient successivement
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&-1&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Cela implique: $\begin{cases}x_1+x_4=0\\x_2-x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}.$

D'où le systéme linéaire a infiniment de solutions satisfaisant: $x_1=x_3=-x_4=-x_2$

(f) Pratiquons l'algorithme de Gauss-Jordan pour la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4&3&2&-1&4\\5&4&3&-1&4\\-2&-2&-1&2&-3\\11&6&4&1&11\end{array}\right)$$

On obtient successivement

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{4}&1\\5&4&3&-1&4\\-2&-2&-1&2&-3\\11&6&4&1&11\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{4}&1\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-1\\0&\frac{-1}{2}&0&\frac{3}{2}&-1\\0&\frac{-9}{4}&\frac{-3}{2}&\frac{15}{4}&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{4}&1\\0&1&2&1&-4\\0&\frac{-1}{2}&0&\frac{3}{2}&-1\\0&\frac{-9}{4}&\frac{-3}{2}&\frac{15}{4}&0\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&4\\0&1&2&1&-4\\0&0&1&2&-3\\0&0&3&6&-9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1\\0&1&0&-3&2\\0&0&1&2&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Cela implique $\begin{cases}x_1+x_4=1\\x_2-3x_4=2\\x_3+2x_4=-3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=1\ -\ x_4\\x_2=2\ +\ 3x_4\\x_3=-3-2x_4\end{cases}$

(g) $\left(\begin{array}{ccc|c}3&11&19&22\\7&23&39&10\\-4&-3&-2&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{11}{3}&\frac{19}{3}&\frac{22}{3}\\7&23&39&10\\-4&-3&-2&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{11}{3}&\frac{19}{3}&\frac{22}{3}\\0&\frac{-8}{3}&\frac{-16}{3}&\frac{-124}{3}\\0&\frac{35}{3}&\frac{70}{3}&\frac{106}{3}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{11}{3}&\frac{19}{3}&\frac{22}{3}\\0&1&2&\frac{31}{2}\\0&\frac{35}{3}&\frac{70}{3}&\frac{106}{3}\end{array}\right)$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\frac{-297}{6}\\0&1&2&\frac{31}{2}\\0&0&0&\frac{-873}{6}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\frac{-297}{6}\\0&1&2&\frac{31}{2}\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

Cela implique $\begin{cases}x-z=\frac{-297}{6}\\y+2z=\frac{31}{2}\\0x+0y+0z=1\end{cases}$, le système n'a pas de solution.

(h) $\left(\begin{array}{ccc|c}3&6&14&22\\7&14&30&46\\4&8&7&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&\frac{14}{3}&\frac{22}{3}\\7&14&30&46\\4&8&7&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&\frac{14}{3}&\frac{22}{3}\\0&0&\frac{-8}{3}&\frac{-16}{3}\\0&0&\frac{-35}{3}&\frac{-70}{3}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&\frac{14}{3}&\frac{22}{3}\\0&0&1&2\\0&0&\frac{-35}{3}&\frac{-70}{3}\end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cela implique $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 - 2y \\ z = 2 \end{cases}$

(k) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 3 & 25 \\ 7 & 9 & 19 & 65 \\ -4 & 5 & 11 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 7 & 9 & 19 & 65 \\ -4 & 5 & 11 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & \frac{-8}{3} & 12 & \frac{20}{3} \\ 0 & \frac{35}{3} & 15 & \frac{115}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-9}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & \frac{35}{3} & 15 & \frac{115}{3} \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-9}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{405}{3} & \frac{405}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-9}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Cela implique $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Exercice 2.

On va construire un système linéaire en notant x (euros)pour le prix du livre d'econométrie, y (euros)pour le prix du livre d'algèbre linéaire, et z (euros) pour le prix du livre de droit. Alors

$$\begin{cases} x + y = 178 \\ 2x + y + z = 319 \\ y + z = 147 \end{cases}$$

Pratiquons l'algorithme de Gauss-Jordan pour la matrice augmentée de ce système, on obtient successivement

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 178 \\ 2 & 1 & 1 & 319 \\ 0 & 1 & 1 & 147 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 178 \\ 0 & -1 & 1 & -37 \\ 0 & 1 & 1 & 147 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 178 \\ 0 & 1 & -1 & 37 \\ 0 & 1 & 1 & 147 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 141 \\ 0 & 1 & -1 & 37 \\ 0 & 0 & 2 & 110 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 141 \\ 0 & 1 & -1 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 55 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 86 \\ 0 & 1 & 0 & 92 \\ 0 & 0 & 1 & 55 \end{array}\right)$

Cela implique $\begin{cases} x + y = 178 \\ y - z = 37 \\ z = 55 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 86 \\ y = 92 \\ z = 55 \end{cases}$

Exercice 4.

1. Faux, contre-example : 1.d
2. Faux, rang d'une matrice est inférieuse du minimum du nombre de lignes et du nombre de colonnes.
3. Vrai
4. Vrai
5. Faux: un système linéaire soit 0, soit 1, soit un nombre infini de solutions

6. Faux: contre-example: 1.d
7. Vrai

Exercice 8.

Notons x, y, z pour le nombre de coqs, de poules, de poussins, respectivement. D'après l'hypothèse, on obtient un système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$$

Pratiquons l'algorithme de Gauss-Jordan pour la matrice augmentée de ce système, on obtient successivement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 3 & \frac{1}{3} & 100 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & \frac{-14}{3} & -400 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-4}{3} & -100 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 200 \end{array}\right)$$

Cela implique $\begin{cases} x-\frac{4}{3}z=-100 \\ y+\frac{7}{3}z=200 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-100+\frac{4}{3}z \\ y=200\ -\ \frac{7}{3}z \end{cases}$

Remarques

1. x, y, z sont des entiers dans $\mathbb{N}$, il s'ensuit que $\frac{4}{3}z = x + 100$ est un nombre entier, d'où z est divisible par 3.
1. On a $x \geq 0$, cela implique $-100+\frac{4}{3}z \geq 0 \iff z \geq 75$, de même $y \geq 0$ implique $200-\frac{7}{3}z \geq 0 \iff z \leq \frac{600}{7} \approx 85,8 \Rightarrow z \leq 85$, car $z \in \mathbb{N}$.

En conlusion, $75 \leq z \leq 85$, z est entier, z est divisible par 3 donc $z \in \{75, 78, 81, 84\}$
-Si $z = 75 \Longrightarrow x = -100 + \frac{4}{3}.75 = 0$ et$y = 200 - \frac{7}{3}.75 = 25$
-Si $z = 78 \Longrightarrow x = -100 + \frac{4}{3}.78 = 4$ et $y = 200 - \frac{7}{3}.78 = 18$
- Si $z = 81 \Longrightarrow x = -100 + \frac{4}{3}.81 = 8$ et $y = 200 - \frac{7}{3}.81 = 11$
-Si $z = 84 \Longrightarrow x = -100 + \frac{4}{3}.84 = 12$ et $y = 200 - \frac{7}{3}.84 = 4$