Géométrie différentielle. Feuille de TD2 : Révisions de calcul différentiel, TFI et TIL

Exercice 1 (Illustrations du TIL et du TFI) **a)** Soit $f : (x, y, z) \to x^2 + y^2 - z^2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On pense à $f(x, y, z)$ comme à l'altitude au point (x, y, z). On s'intéresse aux lignes de niveau de f. La *ligne de niveau* c, pour $c \in \mathbb{R}$ est l'ensemble $\mathcal{L}_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = c\}$.

La ligne de niveau $\mathcal{L}_27$ s'écrit-elle localement (ou globalement) comme le graphe d'une fonction ? Si oui comment ? Même question avec la ligne de niveau 0.

b) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin x$. Le théorème d'inversion locale s'applique-t-il ? Comment ? Même question avec $g(x, y) = (\frac{x^2}{y^2+1}, x^3)$

Exercice 2 (Perturbation d'application) Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, telle que $T(0) = 0$ et 0 n'est pas un point fixe dégénéré, i.e. 1 n'est pas une valeur propre de dT_0.
a) Montrer qu'alors 0 est un point fixe isolé de T, i.e. il existe un voisinage de 0 sur lequel 0 est l'unique point fixe de T. Exemples?
b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, et $T_\lambda := T + \lambda S$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et V voisinage de 0 tels que pour tout $|\lambda| < \delta$, l'opérateur perturbé T_λ a un unique point fixe x_λ dans V. De plus, montrer que l'application $\lambda \in]-\delta, \delta[\to x_\lambda$ est de classe C^1. (on pourra considérer $f(\lambda, x) = T_\lambda(x) - x$).

Exercice 3 (Continuité des racines d'un polynôme) Soit $P_0(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$ un polynôme, et x_0 une racine de P_0 telle que $P_0'(x_0) \neq 0$. Montrer que si (a, b, c) est assez proche de (a_0, b_0, c_0) alors $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ a une unique racine proche de x_0.

Exercice 4 (Lemme de Morse) Soit f une fonction C^∞ à valeurs réelles définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $df_0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$, et que d^2f_0 est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.
Rappeler si besoin la définition de la hessienne $d^2f(0)$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : U \to V$, avec U, V deux voisinages de 0, tel que pour tout $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, on ait

$$f \circ \varphi(x) = f(0) + \frac{1}{2}d^2f_0(x, x)\,.$$

Commentaire Après changement de variable convenable, au voisinage de 0, $f(x)$ ressemble à son développement de Taylor à l'ordre 2.

Exercice 5 (Théorème de d'Alembert via le TIL) *Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application polynomiale non constante. Soient $S = \{z \in \mathbb{C}, P'(z) = 0\}$, $\Lambda = \mathbb{C} \setminus P(S)$ et $\Omega = P(\mathbb{C}) \setminus P(S)$. Montrer que Ω est ouvert et fermé dans Λ. En déduire que P est surjective.*

Exercice 6 (Racine carrée d'une matrice symétrique définie posiitve) *Soit $Sym_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives. Montrer que pour tout $A \in Sym_n^+(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice, notée $\sqrt{A}$, symétrique définie positive, telle que $(\sqrt{A})^2 = A$.*

Montrer de plus que l'application qui à A associe $\sqrt{A}$ est C^∞. Indication : Il est plus simple de montrer que son inverse $A \to A^2$ dans $Sym_n^+(\mathbb{R})$ est C^∞.