

Algèbre linéaire
Feuille de TD 2 - Résolution de systèmes

Plan de travail de la semaine, en cours, en TD, et à la maison :

- Relisez bien sûr le cours d'amphi, avant chaque TD et chaque cours.
- Notez au minimum deux ou trois questions à poser la fois suivante.
- En TD, commencez par sortir vos notes de cours de la semaine précédente, pour pouvoir suivre la méthode étape par étape
- Faire les exercices 1 et 2 et 3a au minimum en TD
- Si vous avez fini, faites aussi l'exercice 4
- Si vous n'avez pas fini, finissez 1,2, 3a, et 4 chez vous.
- Finissez la feuille si vous le pouvez.
- N'hésitez pas à faire (ou refaire) tout ou partie des exercices du chapitre 1 du poly d'exercices ici <https://perso.univ-rennes1.fr/felix.ulmer/AL1/AL1Exos.pdf>. Particulièrement des résolutions de systèmes.

Exercice 1 Résoudre les systèmes linéaires suivants par l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + 4y - z = 8 \\ 6x + 8y - 2z = 3 \end{cases}, \quad \{ x + 2y + 3z = 4$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 11x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 11y + 19z = 22 \\ 7x + 23y + 39z = 10 \\ -4x - 3y - 2z = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + 5y + 3z = 25 \\ 7x + 9y + 19z = 65 \\ -4x + 5y + 11z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 6y + 14z = 22 \\ 7x + 14y + 30z = 46 \\ 4x + 8y + 7z = 6 \end{cases},$$

Exercice 2 Les étudiants achètent leurs livres pour le nouveau semestre. Eddy achète le livre d'économétrie et le livre d'algèbre linéaire pour un total de 178 euros. Léa, qui achète des livres pour elle-même et son ami, dépense 319 euros pour deux livres d'économétrie, un d'algèbre linéaire et un de droit. Ahmed achète le livre de droit et le livre d'algèbre linéaire et a dépensé 147 euros. Combien coûte chaque livre ?

Exercice 3 a) Considérons un système linéaire de trois équations trois inconnues. On suppose qu'il a une seule solution. A quoi ressemble la forme réduite échelonnée par lignes de la matrice du système. Justifier.

b) Même question avec quatre équation trois inconnues ?

Exercice 4 Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses.

1. Un système de 4 équations à 3 inconnues est toujours inconsistant ?
2. Il existe une matrice 3×4 de rang 4
3. Si A est une matrice 3×4 et $V \in \mathbb{R}^4$ alors $A.V$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 .
4. Si A est une matrice 4×4 de rang 4 n'importe quel système linéaire dont la matrice des coefficients est A admet une solution et une seule.
5. Il existe un système de trois équations linéaires à trois inconnues qui a exactement trois solutions.
6. Un système linéaire avec cinq équations et quatre inconnues possède ou bien une infinité de solutions ou bien aucune solution.
7. Si A est une matrice 4×4 tq le système $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ admet une seule solution, alors le système $AX = \vec{0}$ admet une unique solution.

Exercice 5 Soit $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ and $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Trouver une matrice *diagonale* A tq $AX = Y$.
- Trouver une matrice A de rang 1 tq $AX = Y$
- Trouver une matrice triangulaire supérieure avec tous les coefficients non nuls sur et au-dessus de la diagonale tq $AX = Y$.
- Trouver une matrice dont tous les coefficients sont non nuls et tq $AX = Y$.

Exercice 6 Trouver une matrice $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tq $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Exercice 7 Les étudiants achètent leurs livres pour le nouveau semestre. Brigitte achète le livre de grammaire allemande et *Die Leiden des jungen Werthers* pour 64 euros au total, Claude dépense 98 euros pour un livre d'algèbre linéaire et un livre de grammaire allemande, et Denise achète le livre d'algèbre linéaire et *Die Leiden des jungen Werthers* pour 76 euros. Combien coûte chaque livre?

Exercice 8 « Un coq vaut cinq pièces, une poule trois pièces et trois poussins une pièce. Avec 100 pièces, on veut acheter 100 volatiles. Combien de coqs, poules et poussins pouvons nous acheter ? » (*Chine, 5eme siècle*)

Exercice 9 « Un seigneur avait cent personnes à son service et ordonna qu'on leur distribue cent mesures de grain. Il précisa que chaque homme devait recevoir trois mesures, chaque femme deux mesures et chaque enfant une demi-mesure. Combien d'hommes, de femmes, d'enfants avait-il à son service ? » On précise qu'il avait au moins un homme, une femme, un enfant. (*Alcuin, précepteur de Charlemagne, VIIIeme siècle*)

Modèles linéaires pour l'économie

Exercice 10 (Modèle de Leontiev, traité en cours) Considérons une économie fonctionnant avec trois grands secteurs, notés I_1, I_2, I_3 (par exemple l'industrie, l'énergie et les services, mais les données sont fictives). L'unité est le million d'euro.

Le premier secteur (industrie) a besoin de $\frac{1}{6}$ euro d'énergie et de 0 euros de service par euro produit. Le second secteur (énergie) a besoin de 0,5 euros de biens industriels et de 0,25 euros de service par euro d'énergie produit. Le troisième secteur (services) a besoin de 1 euro de biens industriels et $\frac{1}{3}$ euros d'énergie par euro produit.

Par ailleurs, la demande des consommateurs est de 5 millions d'euros de biens industriels, 2 millions d'euros d'énergie et 7 millions d'euros de services.

- Représenter le problème graphiquement.
- Quel système doivent satisfaire les productions respectives x_1, x_2 et x_3 de chaque secteur ?

Exercice 11 (Avantages fiscaux des dons aux oeuvres de charité) Une entreprise fait un bénéfice avant impôts de 100000 euros. Elle s'est engagée à verser 10% de son bénéfice après impôts à la Croix Rouge. Elle paie un impôt local de 5% de son bénéfice, mais le don à la croix Rouge est exonéré de cet impôt. Elle paie un impôt national de 40% de son bénéfice après déduction du don et de l'impôt local.

- Nommer les variables.
- Mettre le problème en équations
- Quel est le montant de son bénéfice après impôts et don ?
- Quel aurait été son bénéfice si elle n'avait rien donné ?

Exercice 12 (Modèle markovien d'emploi) Plus une personne reste longtemps au chômage, plus il est difficile pour elle de retrouver un emploi. Par exemple, on peut considérer ce modèle. Chaque semaine, chaque personne active cherche un emploi. Si un individu est employé une semaine donnée, la semaine suivante, il a une probabilité p de trouver un emploi, et $1 - p$ d'être au chômage. Si un individu est au chômage une semaine donnée, ces probabilités sont q et $1 - q$, avec $0 \leq q < p \leq 1$.

a) On note x_t (resp. y_t) le nombre d'actifs (resp. de chômeurs) la semaine t . Exprimer le nombre d'actifs x_{t+1} et de chômeurs y_{t+1} la semaine $t + 1$.

b) A quelle condition sur x_0 et y_0 le nombre de chômeurs reste-t-il constant au cours du temps ? (On suppose que la population reste constante). On dit alors que la distribution de population entre actifs et chômeurs est stationnaire.

c) Les techniques que nous verrons en fin de semestre nous permettront de dire si, étant donnés x_0 et y_0 arbitraires, les populations x_t, y_t se rapprochent de la distribution stationnaire ou pas.