Algèbre linéaire pour l'économie
Feuille de TD 2 : Algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$
Séances des 21, 23 et 28 septembre 2015

Algèbre linéaire et géométrie

Exercice 1 (Algèbre linéaire et géométrie) Vérifier que les applications suivantes sont linéaires, puis écrire leur matrice.

- La réflexion par rapport à la droite d'équation $y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $2x + 3y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/3$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle π dans $\mathbb{R}^2$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $y = 0$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$par rapport à la droite d'équations $x = 0$ et $y = 0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équaion $z = 0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport à la droite d'équations $z = x$ et $y = 0$

Exercice 2 (Rappels de géométrie élémentaire) *Cet exercice est utile pour faire de la régression linéaire. Calculer la distance d'un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ à la droite d'équation $2x + 5y + 1 = 0$ dans le plan.*
Même question avec la distance d'un point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ au plan d'équation $2x + 5y - z + 1 = 0$

Exercice 3 (Droites et plans) **a)** Combien d'équations linéaires sont-elles nécessaires pour définir un plan ? Une droite ?
b) Donner une équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par les points suivants $A(2, 1, 5)$, $B(-5, 1, 0)$ et $C(2, 1, 1)$.
c) Donner des équations de la droite passant par A et dirigée par le vecteur de coordonnées $(7, 0, 5)$.
d) Donner une équation du plan passant par $C(2, 1, 1)$ et orthogonal au vecteur de coordonnées $(-1, 5, 7)$
e) Donner une équation du plan passant par $B(-5, 1, 0)$ et dirigé par les vecteurs de coordonnées $(7, 1, 5)$ et $(1, 5, 0)$

Exercice 4 (Algèbre linéaire et nombres complexes) On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie pour $z = a + ib$ par $f(z) = (a, b)$, qui permet d'identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. On rappelle que c'est une bijection.
a) Soit Φ l'application linéaire de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par $\Phi(z_1, z_2) = ((2 + i)z_1 - 3iz_2, 3z_1 - (1 + i)z_2)$. Via l'identification ci-dessus, montrer qu'on peut « réécrire » Φ comme une application linéaire Ψ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$.
b) Ecrire les matrices de Φ dans $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ et de Ψ dans $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Appplications linéaires et matrices

Exercice 5 (Polynomes) On identifie un polynome $P(X) = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$ de degré $n \geq 1$ avec avec le point de coordonnées $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Vérifier que l'application dérivation $D : P \to P'$ est linéaire, et donner sa matrice.

Exercice 6 **a)** Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$\begin{aligned}
f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (2x + y, 3x - y) \in \mathbb{R}^2, \\
f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (xy, 2x, y) \in \mathbb{R}^3 \\
f_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (x + y, y + z, z + x) \in \mathbb{R}^3 \\
f_4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (x + 2y, 2x + y, x + y) \in \mathbb{R}^3 \\
f_5 : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 &\mapsto (x - t, y - t, t, x + y + z, x + y + z + t) \in \mathbb{R}^4
\end{aligned}$$

b) Pour celles qui sont linéaires, calculer leur noyau $\ker f_i$ et leur image Imf_i. En déduire si elles sont injectives, surjectives, bijectives, ou pas.

Exercice 7 En cours, on a vu comment définir une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ à partir d'une matrice A à n colonnes et m lignes. De plus une telle application est linéaire, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tous u, v dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ et $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

Montrer que réciproquement, si une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est linéaire alors il existe une certaine matrice Aà n colonnes et m lignes à laquelle elle est associée.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 8 Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels ?

$$\begin{array}{rcl}
F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 3x+2y=2\} & F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+2y=0\} & F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy=1\} \\
F_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2-y^2=0\} & F_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\} & F_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=1\} \\
F_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x=2\} & F_8 = \{(\lambda, 3\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\} & F_9 = \{(2\lambda+3\mu, \mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} \\
G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 3x+2y+5z=0\} & G_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y-z=3\} & G_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2=1\} \\
G_4 = \{(\lambda, 3\lambda, 5\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\} & G_5 = \{(2+\mu, \lambda+3\mu, 1-\mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} & G_6 = \{(3\lambda-\mu, 2\lambda+\mu, \lambda+\mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}
\end{array}$$

Exercice 9 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ainis que les familles

$$F_1 = \{v_1\} \quad F_2 = \{v_1, v_2\} \quad F_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$$

On considère les vecteurs suivants

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Est-ce que le vecteur w_1 (resp. w_2, resp. w_3) est une combinaison linéaire de vecteurs de F_1, F_2, ou F_3 ?
b) Déterminer les sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3 engendrés respectivement par v_1, v_2, v_3.
c) Déterminer toutes les manières d'écrire le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.

Â

Exercice 10 Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$.
a) Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
b) En donner des familles génératrices.
c) Est-ce encore vrai pour l'ensemble $\mathcal{T}$ des solutions de l'équation $x - y + z = 1$?

Exercice 11 **a)** A quelle condition une droite de $\mathbb{R}^2$ est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
b) L'union de deux droites distinctes passant par 0 est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
c) Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
d) Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
e) A quelle(s) condition(s) l'union de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?