Feuille 1: Corrigé d'exercices

September 17, 2018

Exercice 1.

$$\bullet A.Y = A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 19 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ B.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 18 & 17 \\ 3 & 9 & 26 & 20 \\ 12 & 0 & 7 & -26 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ B.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ B.X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ X.Z = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ -3 & -4 & -5 \\ -9 & -12 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ Y.Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ Z.A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 0 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 62 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ Z.B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 2 & 29 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ Z.X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = (-10).$$

Exercice 2.

$$E_{23}.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{12}.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$F_{12}.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B.F_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_{\lambda,12}.A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & 3 & 5+8\lambda & 8+\lambda \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\lambda,12}.B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3\lambda & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B.M_{\lambda,12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\lambda & 1 \\ 3 & 3\lambda+1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarques - La mutiplication à gauche par E_{23} permute la 2-ième et 3-ième ligne de la matrice multipliée.

-La multiplication à droite par E_{23} permute la 2-ième et 3-iéme colonne de la matrice multipliée.

- La mutiplication à gauche par F_{12} permute la 1-ième et 2-iéme ligne de la matrice multipliée.

- La multiplication à droite par F_{12} permute la 1-ième et 2-iéme colonne de la matrice multipliée.

Exercice 3. Dans cet exercice, on note $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $f_1 = (1,0,0), f_2 = (0,1,0), f_3 = (0,0,1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f pour l'application linèaire.

(a) La fonction représentant la réflection par rapport à $y = 0$:

$$f(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x,-y) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque: La matrice de f dans la base canonique est formée par des colonnes dont les coeficients sont les coordonées du vecteur $f(e_i)$ dans la base canonique.
On a $f(e_1) = f((1,0)) = (1,0),\ f(e_2) = f((0,1)) = (0,-1)$, par suite la matrice de f

dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Il suffit de calculer l'image de e_1 et e_2 via cette réflextion : $f(e_1) = f((1,0)) = (0,-1)$, $f(e_2) = f((0,1)) = (-1,0)$, donc la matrice de f via la base canonique est:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $f(e_1) = f((1,0)) = f((\cos 0, \sin 0)) = (\cos(\frac{\pi}{3}, \sin(\frac{\pi}{3})) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
$f(e_1) = f((0,1)) = f((\cos(\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})) = (\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Par suite, la matrice de f via la base canonique est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(d) $f(e_1) = f((1,0)) = f((\cos 0, \sin 0)) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$;
$f(e_2) = f((0,1)) = f((\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2})) = (\cos(\frac{\pi}{2} + \pi), \sin(\frac{\pi}{2} + \pi)) = (0,-1) \Longrightarrow$ La matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(e) $f(f_1) = f((1,0,0)) = (1,0,0)$; $f(f_2) = f((0,1,0)) = (0,0,0)$; $f(f_3) = f((0,0,1)) = (0,0,1)$. D'où la matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) $f((1,0,0)) = (-1,0,0)$; $f((0,1,0)) = (0,-1,0)$; $f((0,0,1)) = (0,0,1) \Longrightarrow$ la matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(g) $f(((1,0,0)) = (1,0,0)$; $f((0,1,0)) = (0,1,0)$; $f((0,0,1)) = (0,0,0) \Longrightarrow$ la matrice de f dans la base canonique est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(h) $f((1,0,0)) = (0,0,1)$; $f((0,1,0)) = (0,-1,0)$; $f((0,0,1)) = (1,0,0) \Longrightarrow$ la matrice de f dans la base canonique est:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(k) Désignons $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale par rapport à la doite $2x+3y=0$ et rappelons que la réflextion par rapport à $2x+3y$=0 est donnée par:

$$f(v) = 2p(v) - v \ \ , \forall v \in \mathbb{R}^2$$

Supposons que $p((1,0)) = (x,y) \Longrightarrow 2x+3y = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-3y}{2}$. Or, le vecteur $(x-1, y-0)$ est orthogonal au vecteur direction $(3,-2)$ de la droite $2x+3y=0$. Il s'ensuit que $3(x-1) - 2y = 0 \Longleftrightarrow 3(\frac{-3y}{2} - 1) - 2y = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{-6}{13} \Longrightarrow x = \frac{-9}{13}$, par suite $p((1,0)) = (\frac{-6}{13}, \frac{-9}{13})$ et

$$f(e_1) = 2p(e_1) - e_1 = (2.\frac{-9}{13} - 1, 2.\frac{-6}{13} - 0) = (\frac{-31}{13}, \frac{-12}{13})$$

De même, on trouve $p(e_2) = p((0,1)) = (\frac{-6}{5}, \frac{4}{5}$ et $f(e_2) = (\frac{-12}{5}, \frac{3}{5})$. D'où la matrice de f dans la base canonique e_1, e_2 est

$$\begin{pmatrix} \frac{-31}{13} & \frac{-12}{5} \\ \frac{-12}{13} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Exercice 4. **Rappel** Soient E, F deux $\mathbb{R}($ ou $\mathbb{C})$-espaces vectoriels, une application $f : E \to F$ est dite 'application linéaire' si:

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, pour tout $x, y \in E$.

(ii) $f(\lambda x) = \lambda.f(x)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $x \in E$.

(a) • :f_1 est linéaire. En effet, vérifions que l'application f_1 satisfait deux conditions i et ii ci-dessus:

(i) $f_1((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f((x_1+x_2, y_1+y_2)) = (2(x_1+x_2)+(y_1+y_2), 3(x_1+x_2) - (y_1+y_2) = (2x_1+y_1, 3x_1-y_1) + (2x_2+y_2, 3x_2+y_2) = f((x_1,y_1)) + f((x_2,y_2))$.

(ii) $f_1(\lambda.(x,y)) = f_1((\lambda x, \lambda y)) = (2.(\lambda x) + (\lambda y), 3.(\lambda x) - (\lambda.y)) = (\lambda(2x+y), \lambda(3x - y)) = \lambda(2x+y, 3x-y) = \lambda f_1(((x,y))$.

• : Un vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ appartient au noyau de f_1 si et selement si:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

par suite, $\ker f_1 = \{(0,0)\}$ et f_1 est injective.

• Notons $e_1 = (1,0)$; $e_2 = (0,1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Puisque f_1 est linéaire, l'image Imf_1 de f_1 est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par les vecteurs:

$$f_1(e_1) = (2,3), f_1(e_2) = (1,-1)$$

ils sonts indépendants car det $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -5 \neq 0$. Par suite, les vecteurs $(2,3) = 2e_1 + 3e_2$ et $(0,1) = e_2$ forment une base de Imf_1, cela implique $Imf_1 = \mathbb{R}^2$ et f_1 est surjective donc il est bijective.

Remarque

1. On pourrait réécrire l'application f_1 sous la forme matricielle:

$$f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   En génégal, toute application qui s'écrit sous cette forme est linéaire.

2. Un cas spécial si f est un **endomorphisme linéaire** (qui va d'un espace vectoriel vers lui-même) , si de plus f est injective, alors elle est automatiquement bijective (donc surjective). D'où on peut constater à partir de la linéarité et de l'injectivité de f_1 qu'elle est bijective (sans caculer Imf_1)

(b) f_2 n'est pas linéaire. En effet, prenons les vecteurs $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et considérons:

$f_2(e_1) = (0,2,0)$; $f_2(e_2) = (0,0,1), f_2(e_1)+f_2(e_2) = (0,2,1), f_2(e_1+e_2) = f_2((1,1,0)) = (1,2,1)$

On voit que $f_2(e_1+e_2) \neq f_2(e_1)+f_2(e_2)$, donc la condition (i) n'est pas satisfaite pour f_2.

(c) Nontons $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
• f_3 est linéaire. Montrons les deux conditions (i) et (ii):

(i) $f_3((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f_3((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2))$
$= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), (y_1+y_2)+(z_1+z_2), (z_1+z_2)+(x_1+x_2))$
$= ((x_1+y_1)+(x_2+y_2), (y_1+z_1)+(y_2+z_2), (z_1+x_1)+(z_2+x_2)) = f_3((x_1,y_1,Z_1))+ f_3((x_2,y_2,z_2))$

(ii) $f_3((\lambda(x,y,z)) = f_3((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) = (\lambda x+\lambda y, \lambda y+\lambda z, \lambda z+\lambda x) = \lambda f_3((x,y,z))$
• Un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient au noyau de f_3 si et selement si:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

cela implique que f_3 est injective.
• l'image Imf_3 de f_3 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $f_3(e_1) = (1,0,1), f_3(e_3) = (1,1,0), f_3(e_3) = (0,1,1)$, ils sont indépendants car det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$. Donc ils forment une base de Imf_3, par suite $Imf_3 = \mathbb{R}^3$ et f_3 est surjective, donc elle est bijective.