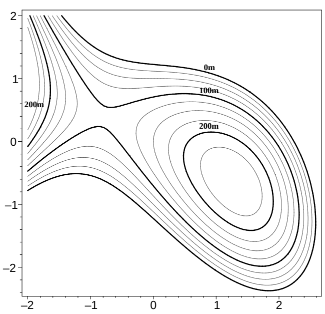
Géométrie différentielle. Feuille de TD 1 : Révisions de calcul différentiel

Exercice 1 **a)** On veut étudier $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Que fait-on? Quels sont les outils de calcul? De représentation visuelle?
b) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction à deux variables. Comment (intuitivement) étudier ses variations, ses extrema, la représenter.
c) Même question avec $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
d) Géométriquement (et sans démonstration) comment peut-on ramener l'étude d'une fonction $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ à celle d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Manipulations de la définition) **a)** Définition d'une application différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ une application constante. Calculer sa différentielle.
c) Même question avec une application linéaire.
d) Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique, et φ la forme bilinéaire symétrique associée. Calculer la différentielle de q.
e) Soit $f(x, y, z) = (x^2y + \ln(\frac{y}{z}), \sqrt{x^2 - y^2})$. Chercher son ensemble de définition. Calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ dans les directions des axes, sa différentielle au point (x_0, y_0, z_0), son gradient au même point. Quels sont les ensembles dans lesquels vivent tous ces objets (dérivée partielle, gradient, différentielle).
f) Mêmes questions avec les fonctions suivantes : $g(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{y}{x}, x + y\right)$ et $h(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.

Exercice 3 (Skieur, exo de L1, initiation douce au calcul diff, exercice de F. Pham) La figure ci-dessous est une carte du relief d'une presqu'île: le contour extérieur est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.



1) Partie expérimentale a) Un skieur de fond perdu dans le brouillard s'arrête, les skis bien horizontaux pour ne pas glisser, et cherche à se repérer à l'aide de son altimètre et de sa boussole. Il voit qu'il se trouve à 100 mètres d'altitude, avec ses skis orientés droit vers l'est. La pente est descendante vers sa gauche. Quelle est sa position sur la carte ?[1]
b)Le skieur décide de continuer son chemin à la boussole, droit vers l'est, jusqu'à atteindre la mer. Dessinez le profil du relief le long de l'itinéraire qui l'attend, en évaluant les dénivelés successifs.
c) Regardant mieux son altimètre avant de se mettre en route, le skieur s'aperçoit avec effroi que celui-ci est cassé, de sorte qu'il ne peut connaître son altitude et que ce qu'il avait déduit en (a) est erroné. Tracez sur la carte l'ensemble de ses positions possibles.
Un plaisancier mouillant dans la baie située au sud de la presqu'île voudrait franchir la presqu'île à skis pour rejoindre la côte nord, en se dirigeant toujours droit vers le nord.
d)Dessinez le profil du relief le long de divers itinéraires sud-nord, en évaluant pour chacun de ces itinéraires l'altitude du point culminant. En quel point de la baie le plaisancier doit-il aborder pour que son dénivelé soit le plus petit possible ? Marquez sur la carte le point culminant de son itinéraire, et évaluez-en l'altitude.
e) La presqu'île est soumise à un fort vent du nord. Coloriez sur la carte la zone de la presqu'île abritée du vent, en essayant de délimiter avec précision le bord de cette zone.
f)En quel(s) point(s) de la carte un skieur, perdu dans un épais brouillard, aura-t-il l'impression d'être sur un plateau ?
2) Partie « calculs » En fait la fonction de la figure a pour expression $f(x, y) = -\dfrac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \dfrac{3}{2}$ (les valeurs des niveaux étant exprimées en centaines de mètres).
a) Discutez, en fonction du paramètre v, l'allure du graphe de $f_{|y=v}$ (restriction de f à la droite ouest-est de latitude v).
b) Précisez par le calcul votre résultat de la question 1b).
c) Discutez, en fonction du paramètre u, l'allure du graphe de la fonction $f_{|x=u}$ (restriction de f à la droite sud-nord de longitude u), et précisez par le calcul vos résultats de la question 1d).
d) Retrouvez et précisez par le calcul votre résultat de la question 1f).
3) Calcul d'un plan tangent Le skieur de 1a) est en fait à l'altitude de 216,66 mètres (mais il ne le sait pas !). Cela correspond à $z = 13/6$ centaines de mètres. Étant dans les conditions de 1a) on peut alors calculer ses coordonnées $x = 1$, $y = 0$: vérifier que ces coordonnées sont cohérentes avec l'équation donnée ci-dessus pour $z = f(x, y)$.
On veut trouver l'équation du plan tangent $\mathbf{P}$ à l'endroit où est le skieur.
a) On veut trouver la « ligne de plus grande pente » à l'endroit où est le skieur. Quelle est sa direction ? (raisonnez dans le plan

[1] Deux positions possibles

P en faisant un dessin).
b) Donnez l'équation du profil du relief de la presqu'île passant par le skieur $(1, 0, 13/6)$, et dirigé vers le nord.
c) Donnez un vecteur directeur de la ligne de plus grande pente, puis l'équation de **P**.

Exercice 4 Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $a \in U$, et si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la fonction f admet-elle une dérivée partielle au point a dans la direction de $\vec{v}$? Si oui, donner son expression en fonction de df_a.
b)Donner des exemples d'applications f, de préférence continues, ayant des dérivées partielles dans toutes les directions $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ au point a mais pas différentiables au point a.

Exercice 5 (Applications linéaires, bilinéaires) a) Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Calculer sa différentielle au point $x \in E$.
b) Soit $\psi : E \times E \to F$ une application bilinéaire. Même question.
c)Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle en $u \in \mathbb{R}^n$ de $v \in \mathbb{R}^n \mapsto < Av, v >$?
d) Même question avec u fixé et l'application $A \mapsto < Au, u >$.

Exercice 6 (Application holomorphe) Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe, et $z_0 \in U$. Quelle propriété vérifie sa différentielle au point z_0, vue comme application linéaire $df_{z_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (Projection stéréographique) Étudier l'application $P : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{\text{pole nord}\}$ définie par

$$P : (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2} \right)$$

(différentiabilité, calcul de la différentielle et des dérivées partielles, image, inversibilité, calcul de l'inverse, ...)

Exercice 8 (Coordonnées polaires) a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta))$. Est-elle différentiable? Injective? Surjective? Sur quel(s) ensemble de définition peut-on l'étudier pour améliorer tout cela? (Faire un dessin).
b) Calculer sa jacobienne, son jacobien. Comment l'inverser? Calculer son (ses?) inverse(s) éventuel(s).
c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1, et $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Exprimer $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$ en coordonnées polaires.
d) Application: $f(x, y) = e^{-x^2/2 - y^2/2}$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx$.
e) (Question très pénible à savoir faire) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2, et $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Comment relier $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r, \theta))$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r, \theta))$? Exprimer $(\Delta f)(\varphi(r, \theta))$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$. (On rappelle que $\Delta f(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

Exercice 9 (Coordonnées sphériques) Mêmes questions avec $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$\Psi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$. Quel est le nom usuel des paramètres θ et φ? (Faire un dessin)

Exercice 10 (Différentielle du déterminant) On considère l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Soit $a \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de det $D \det_a$ au point a.

Exercice 11 Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $A \to A^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle au point a.

Exercice 12 (Différentiation de l'inversion) *Soit f l'application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = a + c\frac{x-a}{\|x-a\|^2}$ de pôle a et de puissance c. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ et calculer sa différentielle au point x. Montrer que la différentielle au point x est une similitude, composée d'une homothétie et d'une réflexion orthogonale par rapport à la perpendiculaire à $x - a$.*
2) *En déduire que si f est une inversion positive préservant le cercle C, et si $f(M) = M'$, alors tout cercle (ou droite) passant par M et M' est orthogonal à C.*

Exercice 13 (Extrema) a) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Enoncer une condition nécessaire pour que f ait un extremum au point $a \in U$.
b) Donner des exemples (avec $n = 1$ et $n \geq 2$) pour lesquels cette condition est satisfaite et f a un extremum en a. Donner des exemples ($n = 1$ puis $n = 2$) pour lesquels cette condition est satisfaite et f n'a pas d'extremum en a.
c) Si f est de classe C^2, donner une condition suffisante pour que f ait un extremum en a. Donner des exemples ($n = 1$ puis $n \geq 2$) dans lesquels f a un extremum en a, et cette condition est/n'est pas vérifiée.

Exercice 14 (Extrema liés) a) Enoncer le théorème des extréma liés.
b) On considère une boite parallélépipédique de dimensions l, L, h. Sa surface est imposée et vaut S_0. Quel est alors son volume maximal? Même question si son volume est imposé et vaut V_0, quelle est sa surface minimale ? Comparer.
c) Mêmes questions avec une boîte cylindrique de rayon r et de hauteur h. Comparer avec les dimensions standard des canettes.