Semaine 1 : Révisions.

Contacts :
barbara.schapira@univ-rennes1.fr, thi-minh-phuong.vu@univ-rennes1.fr

Plan de travail de la semaine, en cours, en TD, et à la maison :

- Planifiez vos semaines de sorte à pouvoir consacrer en moyenne 4h hebdomadaires de travail personnel à l'algèbre linéaire. Prévoyez de travailler à plusieurs au moins 1h par semaine
- Allez à la Bibliothèque universitaire repérer les livres qui pourraient vous aider dans ce cours.
- Ressortez vos cours et TD d'algèbre I et II, et faites le bilan écrit de ce que vous avez bien compris / mal compris / pas compris du tout. Vous apporterez en cours le 19 septembre ce bilan, expliqué au mieux et bien détaillé.
- Faites sur la feuille 1, en TD, si possible, au moins les exercices 1 et 2 en entier, au moins 4 items de l'exercice 3, et les questions a et b de l'exercice 4 pour les fonctions f_1 et f_2.
- Si vous avez fini ces exercices, faites complètement les exercices 3 et 4, puis faites les exercices 5 et 6.
- Finissez, à plusieurs, après le TD, les exercices 1,2,3,4 si vous n'avez pas fini en TD.
- Relisez le cours et le TD de la semaine 1 avant le cours et le TD de la semaine 2. Préparez au moins 3 questions à poser sur ce que vous n'avez pas compris dans le cours et le TD.
- Lisez les énoncés de la feuille 2
- Si vous avez le temps, finissez les exercices 5 et 6 feuille 1 et commencez à chercher les exercices de la feuille 2.

Exercice 1 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, et $Z = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer tous les produits matriciels qui ont un sens.

Exercice 2 Soient A et B les matrices de l'exercice 1. Soit $E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\lambda,12} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Effectuez les produits $E_{23}.A$, $E_{23}.B$, $B.E_{23}$, $F_{12}.A$, $F_{12}.B$, $B.F_{12}$, $M_{\lambda,12}.A$, $M_{\lambda,12}.B$, $B.M_{\lambda,12}$. Observez, commentez.

Exercice 3 (Algèbre linéaire et géométrie) Pour chacune des applications linéaires suivantes, faites un dessin pour illustrer comment les vecteurs sont transformés, puis écrivez sa matrice dans la base canonique (usuelle) de $\mathbb{R}^2$.

- La réflexion (symétrie orthogonale) par rapport à la droite d'équation $y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$

- la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/3$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle π dans $\mathbb{R}^2$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $y = 0$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$par rapport à la droite d'équations $x = 0$ et $y = 0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $z = 0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport à la droite d'équations $z = x$ et $y = 0$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $2x + 3y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 4 **a)** Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$\begin{aligned}
f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (2x + y, 3x - y) \in \mathbb{R}^2, \\
f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (xy, 2x, y) \in \mathbb{R}^3 \\
f_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (x + y, y + z, z + x) \in \mathbb{R}^3 \\
f_4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (x + 2y, 2x + y, x + y) \in \mathbb{R}^3 \\
f_5 : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 &\mapsto (x - t, y - t, t, x + y + z, x + y + z + t) \in \mathbb{R}^4
\end{aligned}$$

b) Pour celles qui sont linéaires, calculer leur noyau $\ker f_i$ et leur image Imf_i. En déduire si elles sont injectives, surjectives, bijectives, ou pas.

Exercice 5 (Droites et plans) On rappelle qu'un plan affine de $\mathbb{R}^3$ est un ensemble de points dont l'équation est de la forme

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = 0\right\},$$

pour (a, b, c) trois nombres réels non tous nuls.
a) Donner une équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par les points suivants $A(2, 1, 5)$, $B(-5, 1, 0)$ et $C(2, 1, 1)$.
d) Donner une équation du plan passant par $C(2, 1, 1)$ et orthogonal au vecteur de coordonnées $(-1, 5, 7)$
e) Donner une équation du plan passant par $B(-5, 1, 0)$ et dirigé par les vecteurs de coordonnées $(7, 1, 5)$ et $(1, 5, 0)$

Exercice 6 (Rappels de géométrie élémentaire) Cet exercice est utile pour faire de la régression linéaire.

- Calculez un vecteur normal à la droite d'équation $2x + 5y + 1 = 0$ dans le plan.
- Soit (x_0, y_0) un point du plan et (p_0, q_0) son projeté orthogonal sur la droite. Faites un dessin.
- Exprimez les coordonnées p_0 et q_0 en fonction de x_0, y_0.
- Calculez la distance du point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ à la droite d'équation $2x + 5y + 1 = 0$.
- Mêmes question dans $\mathbb{R}^3$ avec le plan d'équation $2x + 5y - z + 1 = 0$