Algèbre linéaire pour l'économie
Feuille de TD 1 : Révisions. Systèmes linéaires et le calcul matriciel

Modèles linéaires pour l'économie

Tous les modèles sont tirés de Blume-Simon, maths pour économistes

Exercice 1 (Avantages fiscaux des dons aux oeuvres de charité) Une entreprise fait un bénéfice avant impôts de 100000 euros. Elle s'est engagée à verser 10% de son bénéfice après impôts à la Croix Rouge. Elle paie un impôt local de 5% de son bénéfice, mais le don à la croix Rouge est exonéré de cet impôt. Elle paie un impôt national de 40% de son bénéfice après déduction du don et de l'impôt local.
a) Nommer les variables.
b) Mettre le problème en équations
c) Quel est le montant de son bénéfice après impôts et don ?
d) Quel aurait été son bénéfice si elle n'avait rien donné ?

Exercice 2 (Modèle linéaire de production) Un modèle linéaire de production est un modèle dans lequel une économie produit des biens $1, \ldots, j$, de la façon suivante. Pour produire x_j unités du bien j, on a besoin de $a_{1j}x_j$ unités du bien 1, ... $a_{nj}x_j$ unités du bien n. On suppose que l'offre s'adapte à la demande, de sorte que s'il y a une demande de la quantité c_i de chaque bien i, on doit avoir pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 \cdots - a_{in}x_n = c_i$. Ceci mène à un système d'équations linéaires.

Exercice 3 (Modèle markovien d'emploi) Plus une personne reste longtemps au chômage, plus il est difficile pour elle de retrouver un emploi. Par exemple, on peut considérer ce modèle. Chaque semaine, chaque personne active cherche un emploi. Si un individu est employé une semaine donnée, la semaine suivante, il a une probabilité p de trouver un emploi, et $1-p$ d'être au chômage. Si un individu est au chômage une semaine donnée, ces probabilités sont q et $1-q$, avec $0 \leq q < p \leq 1$.

a) On note x_t (resp. y_t) le nombre d'actifs (resp. de chômeurs) la semaine t. Exprimer le nombre d'actifs x_{t+1} et de chômeurs y_{t+1} la semaine $t+1$.

b) A quelle condition sur x_0 et y_0 le nombre de chômeurs reste-t-il constant au cours du temps ? (On suppose que la population reste constante). On dit alors que la distribution de population entre acitfs et chômeurs est stationnaire.

c) Les techniques que nous verrons en fin de semestre nous permettront de dire si, étant donnés x_0 et y_0 arbitraires, les populations x_t, y_t se rapprochent de la distribution stationnaire ou pas.

Résolution de systèmes linéaires

Exercice 4 (Reconnaissance d'un système linéaire) Parmi les équations suivantes, lesquelles sont linéaires ? Pourquoi$\tilde{?}$

1. $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6$
2. $x_1x_2x_3 = -2$
3. $x_1^2 + 6x_2 = 1$
4. $(x_1 + x_2)(x_1 - x_3) = -7$
5. $x_1 + \sqrt{3}x_3 = 4$
6. $x_1 + 3\sqrt{x_3} = 4$

Exercice 5 Résolvez les systèmes linéaires suivants par substitutio,n, le pivot de Gauss et l'algorithme de Gauss Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 6z & = & -1 \\ 2x & - & 5y & + & 10z & = & 0 \\ 3x & - & 8y & + & 17z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 12x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & -4 \end{array}\right.$$

Résolvez les systèmes linéaires suivants par l'algorithme de Gauss-Jordan.

Exercice 6 Résoudre $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 3y & = & 4 \\ -x & - & y & = & 10 \end{array}\right.$

Calcul matriciel

Exercice 7 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, et $Z = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
Calculer tous les produits matriciels qui ont un sens.

Exercice 8 **a)** Ecrire les systèmes d'équation de l'exercice 5 sous forme matricielle.
b) Par l'algorithme de Gauss-Jordan, mettre les matrices sous forme réduite échelonnée par lignes, et quand c'est possible, calculer l'inverse des matrices associées.

Exercice 9 Soient A et B les matrices de l'exercice 7. Soit $E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\lambda,12} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Effectuez les produits $E_{23}.A$, $E_{23}.B$, $B.E_{23}$, $F_{12}.A$, $F_{12}.B$, $B.F_{12}$, $M_{\lambda,12}.A$, $M_{\lambda,12}.B$, $B.M_{\lambda,12}$.
Observez, commentez.

Exercice 10 (Opérations élémentaires sur les lignes) Écrire chacune des opérations sur les lignes effectuées dans l'exercice 8 sous forme matricielle, comme à l'exercice ci-dessus.

Exercice 11 Mettre les matrices suivantes sous forme réduite échelonnée par lignes. Calculer leur rang, et lorsque c'est possible, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algèbre linéaire et géométrie

Exercice 12 Ecrire la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $3x + 2y + z = 0$.
Même question avec la rotation d'angle $\pi/3$ dans $\mathbb{R}^2$, puis la rotation d'angle π.