Université Rennes 1 — UFR Mathématiques

Préparation à l'agrégation 2020/2021

TD Analyse - Suites et séries de fonctions

Comme la précédente, cette feuille a pour vocation à la fois de vous entrainer à l'écrit, de vous faire réviser des exercices classiques, de vous faire passer à l'oral, et de vous proposer du matériel classique (contenu dans les bouquins classiques) pour l'oral.

Exercice 1 Revoyez les différentes notions de convergences de suites / séries de fonctions : simple, uniforme, p.s., absolue, normale, ... Lesquelles impliquent les autres ?

Donnez des exemples et contre-exemples pour chaque notion de convergence, les plus simples possibles.

Exercice 2 (théorèmes de Dini) Dessinez les graphes d'une suite monotone de fonctions continues (non nécessairement monotones).
Dessinez les graphes d'une suite (non nécessairement monotone) de fonction continues monotones.
Montrez qu'une suite monotone de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue est uniformément convergente.
Montrez qu'une suite de fonctions continues monotones qui converge simplement vers une fonction continue est uniformément convergente.
Ces résultats restent-ils vrais si la limite n'est pas continue ?

Exercice 3 (Polynomes de Bernstein) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que la suite de polynomes $\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$ converge uniformément vers f.
Indication :
1) Considérer une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes (X_n) de paramètre p. Vérifier que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale.
2) Enoncer la loi faible des grands nombres pour les (X_n). Majorer $P(|\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon)$ indépendemment de p par une quantité tendant vers 0 quand $n \to +\infty$.
3) A $p \in [0,1]$ fixé, majorer la quantité $|f(p) - E(f(\frac{S_n}{n}))|$ en distinguant les k/n proches de p ($|k/n - p| \leq \eta$) et les k/n loin de p ($|k/n - p| \geq \eta$), puis conclure.

Exercice 4 (L'escalier du diable) On suppose connue la construction de l'ensemble triadique de Cantor. On note $K_0 = [0,1]$, $f_0 : x \in [0,1] \to \frac{x}{3}$, et $f_2 : x \in [0,1] \to \frac{x+2}{3}$, $K_{n+1} = f_0(K_n) \cup f_2(K_n)$, et $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Définissons $\varphi_0 : [0,1] \to [0,1]$ par $\phi_0(x) = x$, puis pour tout $n \geq 1$, φ_n comme l'unique fonction continue, croissante, affine par morceaux, qui vérifie $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n(1) = 1$ et est constante par morceaux sur chaque intervalle du complÃ©mentaire de K_n.

1. Trouvez une référence pour transformer cette étude en futur développement (pour quelles leçons ?)
2. Montrez que (φ_n) est une suite de Cauchy pour $\|.\|_\infty$.
3. Montrez qu'elle converge vers une fonction φ continue, croissante, telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, dérivable presque partout, de dérivée nulle partout où elle est définie.
4. Interprétez cette conclusion dans le langage des probabilités.

Exercice 5 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge.

1. Montrez que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$.
2. Déduisez-en que $\sum a_n R^n = \lim_{x\to R} \sum a_n x^n$.

3. Calculez les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 6 (Equicontinuité) Soit (f_n) une suite de fonctions de $C([0,1])$. On dit qu'elle est équicontinue sur $[0,1]$ si pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(x,\varepsilon) > 0$ tq si $|x-y| \leq \eta$, alors **pour tout** $n \geq 1$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$.

1. Supposons que $f_n \in C^1([0,1])$ pour tout $n \geq 1$ et qu'il existe $M > 0$ tq $\sup_{n\geq 1} \|f_n'\|_\infty \leq M$. Montrez que (f_n) est équicontinue sur $[0,1]$.
2. Soit (X,d) un espace métrique. Reformulez la définition d'équicontinuité sur (X,d).
3. Soit (X,d) un espace métrique compact et $T : X \to X$ une isométrie. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. On définit sa moyenne ergodique $S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$. Montrez que la famille $(S_n(f))_{n\geq 1}$ est équicontinue.
4. Soit (f_n) une suite équicontinue sur $[0,1]$. Montrez qu'elle est uniformément équicontinue ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$, si $|x_y| \leq \eta$ alors pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$.
5. Supposons que (f_n) converge uniformément vers $f \in C([0,1])$. Montrez que (f_n) est équicontinue sur $[0,1]$.
6. Supposons que (f_n) est équicontinue sur $[0,1]$ et converge simplement vers f. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
7. Soit φ_n une suite de $C([0,1]$. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la suite (f_n) définie par
$$f_n(x) = \int_0^1 K(x,y)\varphi_n(y)dy$$
est équicontinue.

Exercice 7 (Théorème d'Ascoli) Nous allons démontrer le théorème suivant. Soit (f_n) une suite de $C([0,1])$. On suppose que $sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ et que la suite (f_n) est équicontinue. Alors il existe $f \in C([0,1])$ et $n_k \to \infty$ tq f_{n_k} converge uniformément vers f sur $[0,1]$ quand $k \to +\infty$.

a) Montrez que $[0,1]$ contient une suite dense. Notez $(x_p)_{p\geq 1}$ une telle suite.
b) Montrez qu'il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ indépendante de p, telle que pour tout $p \geq 1$, $(f_{n_k}(x_p))_{k\geq 1}$ converge lorsque $k \to +\infty$.
Le procédé d'extraction diagonale de Cantor est adapté ici.
c) Montrez que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(C([0,1]), \| \|_\infty)$.
d) Concluez.