TD d'Analyse - Suites et séries - 7 et 14 septembre

Mode d'emploi : Ce devoir vous servira pour les TD d'analyse, comme entrainement à l'écrit, mais aussi comme matériau pour élaborer des leçons d'oral. Les exercices ne sont surtout pas originaux, mais au contraire pour la plupart classiques ou très classiques, et présents dans la littérature usuelle de Licence, Master, agreg.

Avant chaque TD d'analyse, cherchez **au moins trois ou quatre exercices**, idéalement le double, que vous serez capable d'aller **corriger au tableau**, de manière dynamique et concise (**moins de 10-15min** dans la plupart des cas) devant vos camarades. La recherche des solutions vous préparera très bien pour l'écrit, et la correction à l'oral permettra de vous entrainer pour l'oral. Il est tout à fait autorisé de chercher à plusieurs, et / ou d'aller voir dans les bouquins classiques (après avoir cherché!).

Exercices à travailler : exercices **1,2,6, ,17,18,19 à préparer pour les corriger au premier TD**, exercices **4, 11, 12, 18 à résoudre seul.e ou en petit groupe**, exercices **22,32,33,39 à préparer pour le 2eme TD**.
Travailler signifie ici : chercher d'abord seul.e, puis explorer les bouquins classiques, voir par ex plus bas, pour y étudier la solution proposée, puis refaire sans aide de la correction, et préparer la solution pour la présenter devant vos camarades.

Biblio : Gourdon, Ramis exercices analyse 1, Chambert Loir analyse 1 et 2, Francinou-Gianella-Nicolas exercices analyse 1, Ramis Deschamps Odoux exercices, hubbard West équations différentielles, Arnaudies Fraysse, Monier, Lelong Ferrand Arnaudies, Ciarlet, Schatzman, demailly...

1 Programme agreg, alinea 6 - Analyse à une variable réelle

Relisez un cours de L1-L2, de préférence dans un livre de référence, sur les sujets suivants.

Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, topologie de $\mathbb{R}$, sous-groupes additifs, suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Suites récurrentes. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes. Parties connexes.

Séries numériques Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, de Riemann, à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles Limites, continuité. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.
Dérivée en un point, fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. étude des variations d'une fonction. Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe C k, de classe C k par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange. Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

Fonctions usuelles Fonctions polynÃ´mes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

Intégration Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux Calcul de primitives. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales. Changement de variable. Intégration par parties.
Intégrales généralisées Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semiconvergentes.

Suites et séries de fonctions Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions ; convergence normale. Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.

Convexité Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité. Inégalités de convexité.

Équivalents de suites et séries, développements asymptotiques

Exercice 1 (Série harmonique) Trouver un équivalent, puis les trois premiers termes du développement asymptotique de $H_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n}$.

Indication : Commencez par étudier $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$. Une fois l'équivalent trouvé, l'identité $\ln(n+1) = \Pi_{k=1}^n \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$ sera utile pour le premier terme du DA.

Exercice 2 Étudiez, puis trouvez u équivalent de $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, $u_0 > 0$? *Indication : ce type d'exercices est très classique. Il faut d'abord « deviner » l'équivalent avant de le démontrer. Pour cela, on raisonne d'abord heuristiquement, en introduisant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $u_n = f(n)$, et en écrivant $\frac{u_{n+1}-u_n}{n+1-n} \simeq f'(n)$, de sorte que la relation ci-dessus est l'analogue* *discret de l'équation différentielle $f' = 1/f$. Cette équa diff s'intègre sur $\mathbb{R}_+^*$ en $f(x) = \sqrt{2x}$. Du coup, on s'attend à $u_n \sim \sqrt{2n}$, soit encore $u_n^2 \sim 2n$. Ce serait donc pratique de savoir que la suite $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$ converge vers 2... Y a plus qu'à ...*

Exercice 3 Même question avec $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = v_n + e^{-v_n}$.

Exercice 4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$. En étudiant la quantité $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$, trouver un équivalent de u_n, puis donner un développement asymptotique à deux termes de la suite.

Exercice 5 Par le même raisonnement, trouver un équivalent de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \to 0$, $f(x) = x - Ax^\alpha + o(x^\alpha)$ au voisinage de 0.

Exercice 6 (Formule de Stirling) a) Calculez les intégrales de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$. En particulier, montrez que (I_n) décroit, et établissez les relations

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad I_{n+2} \sim I_n \quad \text{puis} \quad I_{n+1} \sim I_n \, .$$

b) Soit $u_n = \frac{1}{n!}\sqrt{n}(n/e)^n$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln u_n$. Montrez que v_n tend vers 0 puis que u_n tend vers une limite l.
c) Démontrez que $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.
d) Etudiez le reste de $\sum v_n$, puis donnez les premiers termes du développement asymptotique de (u_n).

Exercice 7 Soit (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + u_n}$. Donner un équivalent, puis le deuxième terme du développement asymptotique.

Exercice 8 Soit (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Donner un équivalent, puis le deuxième terme du développement asymptotique.

Exercice 9 Même question avec la suite définie implicitement par $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

Suites récurrentes

Exercice 10 (Escalier et escargot, suites récurrentes) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $f : I \subset \mathbb{R} \to I$) une fonction continue. On souhaite étudier la suite définie par $u_O \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Montrer que si (u_n) converge vers l, alors l est un point fixe de f.
b) Supposons f croissante. Montrez que (u_n) est monotone.
c) Donnez quatre exemples distincts de fonctions croissantes (les plus simples possibles) pour lesquelles (u_n) est strictement croissante et convergeante, strictement croissante divergente, strictement décroisante convergeante, strictement décroissante divergeante. Faites un dessin du graphe de f et des premieres valeurs de (u_n).
d) Supposons f décroissante. Montrez que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Donnez deux exemples distincts simples de fonctions f décroissantes pour lesquelles (u_n) est convergeante / divergente. Faites un dessin du graphe de f et des premières valeurs de (u_n) dans chaque cas.
e) Supposons f croissante, avec un nombre fini ou dénombrable de points fixes $(l_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ supposés ordonnés par ordre croissant. Faites un dessin, et déterminez graphiquement le comportement de (u_n) en fonction de l'intervalle (l_i, l_{i+1}) dans lequel est u_0 et de la situation du graphe de f par rapport à la droite $y = x$ sur cet intervalle.

Exercice 11 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2) On veut étudier les suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, $n \geq 0$.
a) Montrez que l'ensemble des suites vérifiant cette relation forme un ev de dimension 2.
b) Supposons que l'équation dite caractéristique $x^2 = ax + b$ a deux solutions réelles α, β. Montrez que les suites du type ci-dessus sont de la forme $c\alpha^n + d\beta^n$.
c) Supposons que l'équation ait une racine double α. Montrez que les suites en question sont de la forme $P(n)\alpha^n$, avec P un polynôme.
d) Supposons que l'équation ait deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. Déterminer la forme de ces suites en fonction de $\alpha^n \cos \beta n$ et $\alpha^n \sin \beta n$

Exercice 12 Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit (z_n) la suite définie par récurrence par $z_{n+1} = S(z_n)$ avec $S(z) = \alpha z + \frac{\beta}{z}$. On suppose que (z_n) est définie pour tout $n \geq 0$.
1. On suppose z_0 imaginaire pur. Étudier le comportement de (z_n).
2. On suppose maintenant $\text{Re}(z_0) > 0$. Montrer que $z_n \to 1$.

Exercice 13 (Suite de Syracuse) Elle est définie par $u_0 \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ si u_n est impair, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si u_n est pair. Testez la sur quelques exemples? Que se passe-t-il? (par exemple $u_0 = 5$, $u_0 = 13$, $u_0 = 79$...) Plus d'infos sur `http://wikipedia.fr` (ou `www.enigmath.fr` si ça vous amuse)

Exercice 14 Soit (u_n) une suite récurrente ($u_{n+1} = f(u_n)$) avec $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'elle converge ssi $u_{n+1} - u_n \to 0$. (Voir FGN ou Chambert Loir par ex)

Exercice 15 Étudier la suite définie par $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$, avec $\lambda \in]0,1]$ et $u_0 \in]0,1[$.
Même question avec $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = 2 - v_n^2$.
Que peut-on dire de la suite définie par $w_0 \in \mathbb{R}$ et $w_{n+1} = aw_n(1-w_n)$, $0 \leq a \leq 4$. Discuter.

Exercice 16 Énoncer le théorème du point fixe pour les applications contractantes, avec vitesses de convergence. Démonstration? Exemples d'application?

Séries numériques

Exercice 17 (Cours) Relire un cours sur les séries, et par exemple : **a)** Quels critères classiques de convergence de série connaissez-vous ? Exemples d'application ?
b) Comparaison série-intégrale, c'est quoi ?Exemple ?
c) Transformation d'Abel, c'est quoi ?Exemple ?
d) Différence entre série convergente, semi-convergente, absolument convergente, famille sommable, normalement convergente, ...
e) Si je sais que $u_n \sim v_n$, que puis-je en déduire sur $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$?

Exercice 18 Soit (u_n) une suite positive décroissante qui converge vers 0. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature. Lorsqu'elles sont convergentes, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$.

Exercice 19 Soit (u_n) une suite réelle décroissante tendant vers 0. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $nu_n \to 0$.

Exercice 20 Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire. Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X \geq k+1)$$

Exercice 21 (Un théorème taubérien) Soit (a_n) une suite positive décroissante. Soit $c > 0$ et $\alpha \in (0,1)$. Montrez que $a_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$ ssi $S_n = \sum_{k=1}^n a_k \sim \frac{cn^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
Indication : repérez et faites d'abord le sens facile. Comme d'habitude, on s'en sort mieux avec les intégrales...

Exercice 22 Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.
a) Si $\sum u_n$ diverge, discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
b) Supposons $\sum u_n$ diverge et $u_n = o(S_n)$ quand $n \to +\infty$. Donner un équivalent en fonction de S_n des sommes partielles ou des restes de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ lorsque cette série diverge ou converge.
c) Si $\sum u_n$ converge, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$. Discuter en fonction de $\alpha > 0$ la nature de $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$.
d) On suppose $u_n = o(R_n)$ et $\sum u_n$ converge. Exprimer en fonction de R_n un équivalent des sommes partielles ou des restes de la série $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ suivant qu'elle diverge ou converge.

Exercice 23 (Calcul de $\sum \frac{1}{n^2}$) **a)** Pour $m \geq 1$, soit $f_m :]-\pi, \pi[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f_m(\theta) = \frac{\sin(2m+1)\theta}{(\sin\theta)^{2m+1}}$. Montrer que

$$f_m(\theta) = P_m(\operatorname{cotan}^2\theta) \quad \text{où} \quad P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \tbinom{2m+1}{2k+1} (-1)^k x^k\,.$$

b) Trouver les racines de P_m et calculer leur somme.
c) En comparant cotan$x$ à $\frac{1}{x}$, en déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 24 (Nombres de Pisot) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier.
b) En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ converge.
c) Un *nombre de Pisot* est un nombre ξ qui vérifie $|\xi| > 1$ et qui est racine d'un polynôme unitaire P de degré d à coefficients entiers dont toutes les autres racines $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_d$ vérifient $|\xi_k| < 1$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(\pi\xi^n)$ converge.

Exercice 25 Trouver un équivalent de $\left(\Pi_{k=1}^n k^k)\right)^{1/n}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 26 Préciser la nature des séries suivantes.
a) $\sum (-1)^n \left(e - (1+\dfrac{1}{n})^n\right)$
b) $\sum \sin\sqrt{1+n^2\pi^2}$
c) $\sum \sin(n!\pi e)$

Exercice 27 Montrer que la suite $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}\ln^2 n$ converge. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Exercice 28 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs, croissante, qui tend vers l'infini. Soit (x_n) une suite de nombres complexes tq $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{a_n} = l$. Montrer que $\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n} x_k$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exercice 29 Soit $\sum a_n$ une série de réels convergente.
Montrer que pour n tendant vers l'infini, $\sum_{k=1}^{n} k a_k = o(n)$

Exercice 30 Pour $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, déterminer un équivalent de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n\alpha)^k}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n\alpha)^k}{k!}.$$

Exercice 31 (Théorème de Riemann) Soit $\sum a_n$ une série réelle semi-convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ tq la série $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente de somme α.

Convergence en moyenne de Cesàro

Exercice 32 Soit (a_n) une suite de nombres positifs, bornés. Montrer que (a_n) tend vers 0 en moyenne de Cesàro (i.e. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \to 0$) si et seulement si il existe une partie A de $\mathbb{N}$ de densité nulle (i.e. t.q $\lim_{n\to\infty} \frac{\#A\cap[0,n-1]}{n} \to 0$) en dehors de laquelle (a_n) converge vers 0: $\lim_{n\to\infty, n\notin A} a_n = 0$.

Autrement dit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne de Cesàro ssi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus A}$ converge, pour A très petit (de densité nulle).

Exercice 33 (Moyenne de Cesàro d'une suite récurrente) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue; soit $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = f(v_n)$, $n \geq 0$. Soit $u_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} v_k}{n+1}$.
1. On suppose (u_n) bornée. montrer que f admet au moins un point fixe.
2. Trouver un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant un point fixe unique a mais telle que si $v_0 \neq a$, alors (u_n) ne converge pas vers a.

Exercice 34 (Moyennes de Cesàro généralisées) Soit (a_n) une suite d'un espace vectoriel normé E et (α_n) une suite de nombres positifs avec $\alpha_0 > 0$ et $\sum_n \alpha_n = +\infty$.
1. On suppose que $a_n \to l$. Montrer que la suite(b_n) définie par $b_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ converge vers l.
2. On suppose que $a_{n+1} - a_n \to \lambda$. Montrer que $\frac{a_n}{n} \to \lambda$.
3. Application: trouver un équivalent de x_n défini par $x_{n+1} = \sin x_n$, en utilisant un DL de sin au voisinage de 0 puis en prenant $a_n = \frac{1}{x_n^2}$.

Exemples, divers

Exercice 35 (suites arithmétiques, géométriques) *Relire un cours de base si nécessaire.*

Exercice 36 (suites arithmético-géométriques et variantes) Soient $a, b > 0$. **1.** On définit (a_n) et (b_n) par récurrence en posant $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune, la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.
2. Même question lorsque $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}$.

Exercice 37 $y_n = x_{n-1} + 2x_n$ converge ssi (x_n) converge.

Exercice 38 (Suites sous additives) Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tous n, m, $u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Montrer que $\frac{u_n}{n}$ converge vers $l = \inf \frac{u_n}{n}$.

Exercice 39 (développement en fractions continues) **1.** Soit $x \in \mathbb{Q}$, $x \notin \mathbb{N}$ et $x = \frac{p}{q}$ une écriture irréductible, $p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x-E(x)}$. Montrer que si $f(x) = \frac{p'}{q'}$ est une écriture irréductible, alors $q' < p'$. Soit $x_0 = x$, et tant que ça a un sens, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'il existe $n \geq 0$ tel que $x_n \in \mathbb{N}$. On note $y_n = E(x_n)$, puis $x = x_0 = y_0 + \frac{1}{y_1+\frac{1}{y_2+\frac{1}{\cdots}}}$, ou encore $x = [y_0, y_1, \ldots, y_n]$.
2.Soit $x \notin \mathbb{Q}$. Soit $x_0 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $y_n = E(x_n)$. On définit par récurrence deux suites d'entiers par $P_0 = y_0$, $P_1 = y_0 y_1 + 1$, $Q_0 = 1$, $Q_1 = y_1$, $P_{n+1} = P_n y_{n+1} + P_{n-1}$, $Q_{n+1} = Q_n y_{n+1} + Q_{n-1}$. Montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que $x = \dfrac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}}$.
3. Soit $\xi_n = [y_0, \ldots, y_n]$. Montrer que $\xi_n = \dfrac{P_n}{Q_n} = \dfrac{P_{n-1}y_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}y_n + Q_{n-2}}$.
4. Montrer que Q_n,$n \geq 2$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$. Montrer que $P_{n+1}Q_n - P_n Q_{n+1} = (-1)^n$. En déduire que (ξ_{2n}) est croissante, (ξ_{2n+1}) décroissante.
5. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $|x - \frac{P_n}{Q_n}| < \frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$ et $\xi_n \to x$ et si $|x - p/q| < |x - \frac{P_n}{Q_n}|$ alors $q > Q_n$.

Exercice 40 Étudier la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=0}^{n} k^n$.

Exercice 41 Soit (u_n) une suite vérifiant $u_n \to +\infty$ et $u_{n+1} - u_n \to 0$. Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $v_n = u_n - E(u_n)$ (E est la partie entière.)

Divers

Exercice 42 Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin 2u_n$.

Exercice 43 Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{a(1+a^2)}{1+u_n^2}$.

Méthodes numériques

Exercice 44 (Convergence locale de la méthode de Newton dans $\mathbb{R}^n$) 1. Soit $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur $\overline{B} = \overline{B}(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.
1. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tous x, y de la boule $\overline{B}$, on ait $\|df_x - df_y\| \leq \gamma\|x - y\|$. En déduire que pour tous x, y de la boule $\overline{B}$, on a $\|f(x) - f(y) - df_y(x - y)\| \leq \frac{\gamma}{2}\|x - y\|^2$.
2. On suppose de plus que pour tout $x \in B$, df_x est inversible, et qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\|df_x^{-1}\| \leq \beta$. On définit une suite (x_n) par récurrence par $x_{n+1} = x_n - df_{x_n}^{-1}.f(x_n)$. Supposons que $\alpha = \|x_1 - x_0\| < \frac{2r}{2+\beta\gamma}$. Alors la suite (x_n) vérifie pour tout $n \geq 0$ $x_n \in B$ et $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha h^{2^n-1}$, où $0 < h < 1$ est une constante à préciser.
3. Montrer que (x_n) converge vers un élément $\xi \in B$ tel que $f(\xi) = 0$. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a

$$\|x_n - \xi\| \leq \alpha \frac{h^{2^n-1}}{1 - h^{2^n}}.$$

4. Commentaires.

Exercice 45 (Accélération de convergence, méthode d'Aitken) Soit (x_n) une suite convergeant vers une limite ξ, mais "trop lentement". On suppose qu'il existe une constante k telle que $0 < |k| < 1$ telle que $x_{n+1} - \xi \sim k(x_n - \xi)$.Soit encore $x_n - \xi \sim k^n(x_0 - \xi)$.

1. On peut remplacer x_n par $v_n = \frac{x_{n+1} - kx_n}{1-k}$. Vérifier que v_n converge vers ξ plus vite que x_n (i.e. $(v_n - \xi)/(x_n - \xi) \to 0$.
2. La méthode d'Aitken consiste à remplacer la suite (x_n) par la suite (y_n) définie par $y_n = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$, soit encore $y_n = \frac{x_{n+1} - k_n x_n}{1-k_n}$ avec $k_n = \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}$. (Noter qu'il n'y a pas besoin de connaître k!) Montrer que (y_n) converge plus vite que (x_n), i.e. $(y_n - \xi)/(x_n - \xi) \to 0$.

Exercice 46 (Accélération de convergence des suites récurrentes) Soit (x_n) une suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, avec f de classe C^1. On considère alors la suite définie de la manière suivante: $X_0 = x_0$, $X_{n+1} = g(X_n) = X_n - \frac{(f(X_n)-X_n)^2}{f \circ f(X_n)-2f(X_n)+X_n}$. **1.** Montrer que les points fixes de g sont aussi des points fixes de f. Réciproquement, montrer que si $f(\xi) = \xi$ et $f'(\xi) \neq 1$ alors $g(\xi) = \xi$.
2. On suppose que ξ est un point fixe répulsif de f ($|f'(\xi)| > 1$ et $f(\xi) = \xi$). Que fait (x_n)? Montrer que si X_0 est assez proche de ξ, $X_n \to \xi$. Quelle est la vitesse de convergence de X_n? Commentaires?

Pour les exercices suivants, on consultera avec profit Schatzmann et Demailly

Exercice 47 (Résolution numérique d'équations différentielles) Décrire la méthode d'Euler. Quand converge-t-elle? Intérêts et inconvénients? Lien avec les suites? Idem avec la méthode de Runge Kutta

Exercice 48 (Intégration numérique) Décrire (si possible sur des exemples) la méthode des trapèzes, du point milieu, de Simpson, de Runge Kutta. Convergence? Vitesse?

Exercice 49 Décrire l'algorithme de transformation de Fourier rapide. Intérêt?

Exercice 50 On itère une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($U_0 \in \mathbb{R}^n$ et $U_{n+1} = A.U_n$. Que peut-il se passer? Discuter suivant les valeurs propres de A, et le point de départ U_0.

Systèmes dynamiques

Définition 1 *Un* système dynamique *est la donnée d'un espace X et d'une application $f : X \to X$. Lorsque X est un espace topologique, on suppose en général f continue. Lorsque $(X, \mathcal{B}, m)$ est un espace mesuré, on suppose f mesurable. Lorsque $X = \mathbb{R}^n$, on peut supposer f différentiable...*

On s'intéresse alors aux orbites *du système dynamique. L'*orbite *de $x_0 \in X$ est la suite de points $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots\}$. La théorie des systèmes dynamiques cherche à décrire le comportement des orbites de tous les points x_0 de X.*

À x_0 fixé, il ne s'agit "que" de l'étude d'une suite récurrente. Mais les systèmes dynamiques s'intéressent au comportement de toutes les orbites lorsque le point de départ $x_0 \in X$ varie.

Exercice 51 (Équirépartition) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n \mod 1$, $u_0 \in [0,1[$. Nous allons montrer le résultat suivant. *Il existe un ensemble $Q \subset [0,1[$ de mesure de Lebesgue $\lambda(Q) = 1$ tel que pour tout $u_0 \in Q$ et pour tout intervalle $[a,b[\subset [0,1[$, le nombre moyen de termes de la suite (u_n) dans l'intervalle $[a,b[$ converge vers $b-a$.* Soit encore $\frac{1}{n}\#\{1 \le k \le n,\ u_k \in [a,b[\} \to b-a$ quand $n \to \infty$. Ceci signifie qu'asymptotiquement, la suite (u_n) se répartit uniformément dans tous les sous-intervalles $[0,1[$, proportionnellement à la longueur de chaque intervalle.

1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ il existe $x \in [0,1[$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partant de $u_0 = x$ est périodique de période exactement m : $u_m = u_0$ et $u_n \neq u_0$ pour $1 \le n \le m-1$. Trouver tous les u_0 possibles. En déduire que les suites associées ne sont pas équiréparties au sens ci-dessus.

2) Nous allons démontrer le théorème pour $a = 1/2$ et $b = 1$. Notons $I_0 = [0,1/2[$ et $I_1 = [1/2,1[$. Si $x \in [0,1[$ notons $X_0(x) = 0$ si $x \in I_0$ et $X_0(x) = 1$ si $x \in I_1$. On construit ensuite la suite $(X_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_{n+1}(x) = X_n(f(x)) = X_O(f^{\circ n}(x))$. Autrement dit, $X_n(x) = 0$ si $f^n(x) \in I_0$ et $X_n(x) = 1$ sinon.
2.a) Montrer que pour tout $n \ge 1$,

$$x \in I_n(x) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(x)}{2^{k+1}}, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(x)}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^n}\right[$$

En déduire que $x = \sum_{n\ge 0} \frac{X_n(x)}{2^{n+1}}$.
2.b) On munit $I = [0,1[$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
2.c) À l'aide de la loi forte des grands nombres, en déduire le théorème lorsque $[a,b[= I_0$ ou I_1. **3a)** L'étape suivante est la démonstration du théorème pour les intervalles dyadiques $[a,b[= [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[$, $m \ge 1$. Pour cela, on fait le même raisonnement en remplaçant f par $f^m : x \to 2^m x$, avec 2^m intervalles $I_k^{(2^m)} = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[$. On construit une suite de v.a. iid $X_n^{(2^m)}$ de loi de Bernoulli, $P(X_n^{(2^m)} = 1) = \frac{1}{2^m}$. Et le même raisonnement donne $\frac{1}{n}\#\{n \in \mathbb{N}, f^{nm}(x) \in I_k^{(2^m)}\} \to \frac{1}{2^m}$
3b) On obtient le résultat annoncé pour les intervalles dyadiques $I_k^{(2^m)}$ avec f en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $0 \le r \le m-1$ tel que $n = mp + r$. On utilise 3a et un argument de moyenne de Cesàro pour démontrer le théorème pour tous les intervalles dyadiques d'ordre m.
4 On passe à tous les intervalles $[a,b[$ par un argument d'approximation de a et b par des nombres dyadiques.

Exercice 52 (Equirépartition (bis)) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1[$.
1. Montrer que si (x_n) est *équirépartie dans* $[0,1[$, i.e. pour tout $[a,b[$ dans $[0,1[$, $\frac{1}{n}\#\{1 \le k \le n,\ x_n \in [a,b[\} \to b-a$ quand $n \to \infty$, alors (x_n) est dense dans $[0,1[$. Quel est l'ensemble de ses valeurs d'adhérence?
2.a. Montrer que (x_n) est équirépartie dans $[0,1[$ ssi pour toute fonction Riemann intégrable f sur $[0,1[$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f(t)\,dt$. (On notera $S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.
2.b Montrer le même résultat avec f continue sur $[0,1[$.
2.c. Montrer qu'il suffit de supposer que pour tout entier non nul $m \in \mathbb{Z}^*$, on a $\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi m x_k} = o(n)$ quand $n \to \infty$.
3. Soit $\theta \notin \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $x_n = n\theta \mod 1$ est équirépartie dans $[0,1[$. Interpréter le résultat en termes de rotations.

Exercice 53 (Théorème de Sarkovski) 1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Soit $[\alpha,\beta] \subset f([0,1])$. Montrer qu'il existe un segment $[u,v] \subset [0,1]$ tel que $f([u,v]) = [\alpha,\beta]$.
2. On suppose qu'il existe n segments $I_0,\ldots,I_{n-1}$ tels que $I_0 \subset f(I_{n-1})$, $I_{k+1} \subset f(I_k)$ pour $n-2 \ge k \ge 0$. Montrer que $f^n = f \circ f \circ \ldots f$ admet un point fixe x_0 tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout k.
3. Théorème de Sarkovski Un point fixe d'ordre n est un point x_0 tel que $f^n(x_0) = x_0$ et $f^k(x_0) \neq x_0$ pour $1 \le k \le n-1$. Si f a un point fixe d'ordre 3, montrer qu'alors pour tout $n \ge 1$, elle a un point fixe d'ordre n. *Indication: prendre les intervalles $I_0 = [x_0, f(x_0)]$, $I_1 = [f(x_0), f^2(x_0)]$ et $I_2 = [f^2(x_0), f^3(x_0) = x_0]$ et essayer d'appliquer ce qui précède avec une suite de n intervalles bien choisis.*

Exercice 54 (Itération complexe) *Regarder le paragraphe en question dans Hubbard-West.*