TD Analyse - Intégration, analyse de Fourier

Comme la précédente, cette feuille a pour vocation à la fois de vous entrainer à l'écrit, de vous faire réviser des exercices classiques, de vous faire passer à l'oral, et de vous proposer du matériel classique (contenu dans les bouquins classiques) pour l'oral.

Quelques références bien utiles: un livre de théorie de la mesure et intégration (Revuz / Briane-Pagès / ...) Zuily Queffelec (un chapitre entier consacré au sujet), Francinou Giannella Nicolas tome 2, Chambert Loir-Fermigier, puis des ouvrages sur Fourier, distributions, ...

Exercice 1 (Intégrale de Riemann) Relire un cours sur le sujet, revoir le lien entre primitive et intégrale. Revoir la notion d'intégrale généralisée ou semi-convergente.

Exercice 2 (Intégrale de Lebesgue) Revoir la construction de l'intégrale de Lebesgue, les grands théorèmes et leurs démos: convergence monotone et dominée, lemme de Fatou, théorème de continuité/dérivabilité/holomorphie sous le signe $\int$. Trouver des exemples et contre-exemples pour les illustrer.

Exercice 3 Étudiez l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$. L'application $t \to \frac{\sin t}{t}$ est-elle intégrable ? Commentez.

Exercice 4 (Intégrales de Wallis) Calculer les intégrales de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.

Exercice 5 Soit $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$, puis un équivalent et un DA à deux termes de u_n.

Exercice 6 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1([0, 2\pi])$. Montrer que $\int_0^{2\pi} f(t)e^{int} \to 0$ quand $n \to \pm\infty$.

Exercice 7 Soit $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$. On définit $\varphi * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)f(y)dy$. Vérifiez que $\varphi * f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, que $\varphi * f(x) = f * \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que $\varphi * f$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (Méthode de Laplace) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et φ une fonction à valeurs réelles définie sur I, de classe C^2 sur I, tq φ' s'annule uniquement en $x_0 \in I$ et $\varphi''(x_0) < 0$. Soit f une fonction continue définie sur I, à valeurs complexes, tq $f(x_0) \neq 0$ et $\int_I e^{t\varphi(x)}|f(x)|dx < \infty$ pour tout $t > 0$. On définit $F(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{t\varphi(x)} f(x)dx$. Montrer que quand $t \to +\infty$, on a

$$F(t) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}}\, f(x_0)\, \frac{e^{t\varphi(x_0)}}{\sqrt{t}}\,.$$

Exercice 9 (théorème d'Egorov) Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilité, et (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant p.s. vers une fonction mesurable m. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble X_ε de mesure au moins $1-\varepsilon$ sur lequel (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 10 Soit (f_n) une suite de fonctions L^2 qui converge dans L^2 vers $f \in L^2$. Montrer qu'il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge p.s. vers f.

Exercice 11 (Fonctions plateau) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, Ω un voisinage ouvert de K. On souhaite montrer qu'il existe une fonction $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $\theta = 1$ sur K, $\theta = 0$ sur Ω^c et $0 \le \theta \le 1$.

1. Considérons la fonction définie pour $\|x\| < 1$ par $\exp(\frac{1}{1-\|x\|^2})$ et par 0 si $\|x\| \ge 1$. Montrez qu'elle est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. *Indication : commencez par $n = 1$.*
2. Déduisez-en une fonction ρ qui est C^∞, positive et nulle en dehors de la boule unité, d'intégrale 1.
3. Montrez qu'il existe $\varepsilon > 0$ tq le 2ε-voisinage de K soit inclus dans Ω.
4. Soit $\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$. Quel est le support de ρ_ε ?
5. Montrez que $\theta_\varepsilon := \mathbf{1}_{K_\varepsilon} * \rho_\varepsilon : x \to \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_K(y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $0 \le \theta_\varepsilon \le 1$. Quel est son support ?
6. Vérifiez que θ_ε vaut 1 sur K. Concluez.

Exercice 12 (Un lemme très utile) *Soit $f \in L_c^p(\mathbb{R}^n)$ une fonction de L^p à support compact. On* admettra ici *que l'ensemble $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ pour la norme L^p. On note $\tau_a f$ l'application $x \to f(x-a)$. Montrez que $\tau_a f$ converge vers f dans L^p.*

Exercice 13 (Théorèmes de densité) Montrez les propriétés suivantes. *(l'exercice précédent sera utile par endroits)*

1. $C^k_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^k(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie de la Convergence uniforme sur les compacts
2. $L^p_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ en norme L^p
3. $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^k_c(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie de la norme C^k,
4. $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p_c(\mathbb{R}^n)$ et dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$ en norme L^p
5. $C^0_c(\mathbb{R}^n)$ ou $C^k_c(\mathbb{R}^n)$ ou $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Exercice 14 (Méthode de la phase stationnaire) Le but est de comprendre le comportement de $F(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a(x)\, dx$. On suppose ici que $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞ à support compact.

1. Si φ ne s'annule pas sur le support de a, montrez que $F(t) = -\dfrac{1}{it}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} \left(\frac{a}{\varphi'}\right)'(x)\, dx\,.$
2. Déduisez-en que $|F(t)| \leq C_1 \frac{1}{t}$ lorsque $t \to +\infty$.
3. Par récurrence, montrez que lorsque φ ne s'annule pas sur le support de a, il existe pour tout $N \geq 1$ une constante C_N tq $|F(t)| \leq C_N \frac{1}{t^N}$ lorsque $t \to +\infty$.
4. Supposons maintenant que φ a un unique zéro x_0 sur le support de a, avec $\varphi'(x_0) = 0$ et $\varphi''(x_0) \neq 0$. Je vous renvoie à la lecture du théorème VI.3 chap 9 de Zuily Queffelec. On traite d'abord le cas où $\varphi(x) = x^2$, avec les outils de transformée de Fourier (Parseval), puis le cas général.

Exercice 15 (Fonction d'Airy) Etudier la fonction définie par

$$Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}}\, dx, \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}\,.$$

Montrer en particulier qu'elle est C^2 sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est solution de l'équation $u'' - tu = 0$. En déduire qu'elle est C^∞.

Transformée de Fourier

Exercice 16 Rappelez la définition de la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 17 Soit $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrez que $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$. Déduisez-en que la transformée de Fourier se prolonge à L^2.

Exercice 18 Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes:
1) $1_{[a,b]}$ 2) $x \to e^{-x^2/2}$ (loi gaussienne ou loi normale) 3) $x \to e^{-ax} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$ (loi exponentielle)
4) $x \to f(ax)$ où f est intégrable et $a \neq 0$ (fonction de dilatation).

Exercice 19 1)Etudier le lien entre parité et transformée de Fourier
2)Calculer les transformées de Fourier sur $\mathbb{R}$ des fonctions $x \to e^{-|x|}$, $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ et $x \to \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 20 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Vérifiez la relation $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u) \times \mathcal{F}(v)$.

Séries de Fourier

Le programme de l'agreg :
Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable rélle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet, de Fejer et de Parseval.

L'article de wikipedia `https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Fourier` n'est pas mal fait.
Dans toute cette série d'exercices, soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour la hotte du père noel éventuellement `https://www.petitapetit.fr/produit/joseph-fourier-bd/`
Un grand laboratoire de recherche mathématique français porte son nom. Lequel ?

L'esprit des séries de Fourier, c'est d'approcher une fonction périodique, disons 2π-périodique pour simplifier, par des sommes de sinus et de cosinus. D'une part, il est plus simple de considérer des fonctions à valeurs complexes et de travailler avec l'exponentielle complexe, mais c'est juste plus pratique. On voudrait donc écrire une fonction 2π-périodique à valeurs complexes comme combinaison linéaire d'exponentielles e^{inx}. Il est facile d'associer à f les coefficients naturels de cette combinaison linéaire, appelés coefficients de Fourier. En revanche, il est plus compliqué de montrer que f coincide avec cette combinaison linéaire. C'est l'objet des théorèmes type *théorème de Féjer*, même si les énoncés sont partiellement satisfaisants.

Plus généralement, on pourrait vouloir écrire f comme combinaison linéaire de fonctions périodiques différentes des sinus et cosinus. C'est l'objet de la théorie des ondelettes.

Exercice 21 Rappelons que $L^2([0,2\pi]) = \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \int_{[O,2\pi]} |f(t)|^2 dt < \infty\}$, muni du produit scalaire $< f, g >_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(t)\bar{g(t)}dt$ est un espace de Hilbert.
Montrez que les fonctions $e_n : x \to e^{inx}$ sont deux à deux orthogonales et de norme 1. *Nous verrons plus bas qu'il s'agit d'une base hilbertienne, i.e. leurs combinaisons linéaires sont denses dans* $L^2([0,2\pi])$.

Exercice 22 Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. $L^1([0,2\pi],\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$. Ses coefficients de Fourier sont définis par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(t)e^{-int}dt$.
a) Justifier que ces coefficients sont bien définis. Réinterpréter le lemme de Riemann-Lebesgue en termes des coefficients de Fourier de f.
b) Lorsque $f \in L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$, montrez que ses coefficients de Fourier sont bien définis. Comment les interpréter géométriquement?
c) Soit $f \in L^1([0,2\pi],\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$. Soit $\check{f}$ la fonction définie par $\check{}f(t) = f(-t)$. Quelle relation entre les coefficients de Fourier de f et $\check{f}$?
d) Même question avec ceux de f et $\bar{f}$.
e) Calculez les coefficients de Fourier de $\tau_a f$ (voir exo 12).
f) Calculez les coefficients de Fourier de $e_k \times f$.
g) Montrez que $f * e_n = c_n(f)e_n$.
h) Si $f \in C^1([0,2\pi])$, $c_n(f') = inc_n(f)$.

Exercice 23 (Fonctions à valeurs réelles) Lorsque f est 2π-périodique à valeurs réelles, on définit $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$.
a) Exprimez a_n et b_n en fonction des c_m et réciproquement.
b) Que vérifient ces coefficients lorsque f est paire ? impaire ?

Exercice 24 Montrez que l'application de $L^1([0,2\pi]) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui à f associe la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est :
$*$ linéaire,
$*$ à valeurs dans l'ensemble des suites tendant vers 0 à l'infini,
$*$ continue et de norme 1 pour la norme $\|.\|_\infty$
$*$ un morphisme d'algèbre au sens où $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 25 (Noyaux de Dirichlet et Féjer) Soient $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ le *noyau de Dirichlet* et $K_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k$ le *noyau de Fejer*. On note $S_N(f) = f * D_N$ et $\sigma_N(f) = f * K_N$. Montrez les propriétés suivantes.

1. D_N est pair et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1$
2. $D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$
3. Vérifiez que $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_n(f)$.
4. $K_N = \sum_{n=-N}^{N}(1 - \frac{|n|}{N})e_n$, $K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin Nx/2}{\sin x/2}\right)^2 \geq 0$,
5. $\|K_N\|_1 = 1$

Exercice 26 Montrez qu'il existe une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier $S_N(f)$ diverge en au moins un point, par exemple $x = 0$.

Exercice 27 Montrer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors elle converge vers l en moyenne de Césaro.

Exercice 28 (Théorème de convergence de Fejer) a) Soit f une fonction continue 2π-périodique. Montrez que $\sigma_N(f) = f * K_N$ vérifie $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\sigma_N(f) \to f$ uniformément sur $[0,2\pi]$.
b) Si $f \in L^p([0,2\pi])$, $1 \leq p < \infty$, montrez que $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\sigma_N(f)$ tend vers f dans L^p.

Exercice 29 (Applications importantes du théorème de Fejer) Montrez les propriétés suivantes.

1. Les polynômes trigonométriques, i.e. les combinaisons linéaires finies des (e_n), sont denses dans $C([0,2\pi],\mathbb{C})$
2. Si f est continue 2π-périodique, et s'il existe $x_0 \in [0,2\pi]$, tel que $S_N(f)(x_0)$ converge, alors sa limite est $f(x_0)$.
3. Si f est continue 2π-périodique, et si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$ ($S_N(f)$) converge normalement), alors f est *développable en série de Fourier*, i.e. $f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$.
4. (Parseval) La famille (e_n) est une base hilbertienne de $L^2([0,2\pi])$, et si $f \in L^2([0,2\pi])$, alors
$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 .$$

5. Si f est continue, 2π-périodique et C^1 par morceaux alors sa série de Fourier converge normalement vers f
6. Si f et g sont continues (resp. dans $L^1([0,2\pi])$, 2π-périodiques, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$ (resp. $f = g$ p.p.)

Exercice 30 (Dirichlet) Enoncez le théorème de Dirichlet, lisez sa preuve.

Exercice 31 (Exemples, suite) 1)Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.
Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
2)Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.
Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 32 (Formule de Poisson) Soit $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ une fonction continue intégrable, et $\hat{F}$ sa transformée de Fourier. On suppose qu'il existe $M > 0, \alpha > 1$ tq pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \leq M(1+|x|)^{-\alpha}$, et que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < \infty$.
a) Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+n)$. Montrez que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, et 1-périodique.
b) Montrez que les coefficients de Fourier de f sont donnés par $c_m(f) = \hat{F}(m)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.
c) Montrez que la série de Fourier de f converge normalement.
d) Déduisez-en la *formule sommatoire de Poisson*:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n)\,.$$

Exercice 33 Soit f une fonction continue 2π-périodique. Vérifiez les propriétés suivantes.

1. Si f est C^k, $k \geq 1$, alors $n^k c_n \to 0$ quand $|n| \to \infty$.
2. Si $k \geq 2$ et $c_n = O(|n|^{-k})$, alors f est C^{k-2}
3. f est C^∞ ssi (c_n) est une suite à décroissance rapide ($n^k c_n \to 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ fixé)

Exercice 34 (Inégalité de Wirtinger) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique de classe C^1 telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt\,,$$

et caractériser l'égalité.

Exercice 35 (Inégalité isopérimétrique) Soit $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une courbe de Jordan de classe C^1, i.e. une courbe C^1, injective sur $[a,b[$, avec $\gamma(b) = \gamma(a)$. Soit L sa longueur, et soit S la surface de la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. On admettra que sa longueur est donnée par $L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ et la surface S (via la formule de Stokes) par $S = \frac{1}{2} Im \int_a^b \gamma'(t)\overline{\gamma(t)} dt$.
a) Montrez qu'on peut supposer $[a,b] = [0,2\pi]$.
b) Exprimez L^2 et S à l'aide des coefficients de Fourier de γ.
c) Montrez que $L^2 \geq 4\pi S$ avec égalité ssi γ décrit un cercle.

Exercice 36 (Equation de la chaleur) Le but de cet exercice est de résoudre l'équation de la chaleur en dimension 1. Une barre métallique de longueur L est représentée par le segment $[0,L]$, et la température à l'instant t en un point x de la barre est $u(x,t)$. Soit $Q =]0,L[\times]0,\infty[$. Cette température vérifie l'*équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans} \quad Q\,.$$

On cherche donc les solutions $u \in C^\infty(Q) \cap C^0(\overline{Q})$ à l'équation ci-dessus, vérifiant de plus la condition de bord $u(0,t) = u(L,t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et la condition initiale $u(x,0) = h(x)$ pour une fonctin h de classe C^1 sur $]0,L[$ et continue sur $[0,L]$, avec $h(0) = h(L) = 0$.
a) Dans un premier temps, on oublie la condition initiale h. Montrez que si u est une telle solution de l'équation de la chaleur de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$, alors nécessairement u doit être du type $\sin(\frac{n\,\pi}{L}x)e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$.
b) Montrez que l'on peut prolonger h en une fonction $\tilde{h}$ de classe C^1 impaire sur $[-L,L]$.
c) Montrez que $\tilde{h}$ admet un développement en série de Fourier normalement convergent $\tilde{h}(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n \sin\frac{n\pi}{L}x$ sur $\mathbb{R}$.
d) Montrez que la fonction

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^\infty a_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

est la solution recherchée.

Exercice 37 (Fonctions continues dérivables nulle part) A l'aide de séries de Fourier, construire une fonction continue dérivable nulle part.