TD Distributions-Fourier Automne 2019

Préambule : Comme d'habitude, lisez le programme et cherchez de bons livres, i.e. des livres qui vous inspirent, à votre niveau. Le programme 2020 est très ambitieux, mais à l'oral, de simples illustrations en dimension 1 sont à la fois grandement appréciées et amplement suffisantes. Concentrez-vous donc sur la dimension 1 dans un premier temps.

Programme 2020 : En dimension $d > 1$, on considère comme admise la formule « d'intégration par parties » (`Stokes`) sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ suffisamment régulier, de frontière $\partial\Omega$

$$\int_\Omega \partial_{x_j} f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\nu_j(x)\, d\sigma(x)$$

où $\vec{\nu}(x)$ est le vecteur normal sortant de Ω au point x de $\partial\Omega(x)$ (*et* $\nu_j(x)$ *sa composante* $\nu_j(x) =< \vec{e}_j, \vec{\nu}(x) >$). Il est en revanche attendu une certaine familiarité dans la manipulation de telles formules, par exemple dans le cas où Ω est une boule de $\mathbb{R}^d$.
12.1 Distributions sur $\mathbb{R}^d$.
(a) Espace vectoriel des fonctions C^∞ à support compact. Stabilité par dérivation. Stabilité par multiplication par une fonction C^∞. Partitions de l'unité. Construction d'approximations de fonctions et densité dans les espaces de fonctions usuels.
(b) Distributions. Exemples de distributions : fonctions localement intégrables, masse de Dirac et ses dérivées, valeur principale de Cauchy. Principes du calcul par dualité-transposition. Dérivation ; multiplication par une fonction C1. Formule des sauts. Suites convergentes de distributions : définition, exemples. Notion de support d'une distribution ; cas des distributions à support ponctuel.
12.2 Espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
(a) Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. Fonctions gaussiennes et leurs dérivées. Stabilité par dérivation. Stabilité par multiplication par une fonction C^∞ à croissance lente. Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Convolution de deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
(b) Espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées [...] Exemples de distributions tempérées : fonctions L^2 et représentation de Riesz, fonctions L^p, cas des fonctions périodiques, peigne de Dirac. Dérivation des distributions tempérées ; multiplication par une fonction C^∞ à croissance lente. Convolution d'une distribution tempérée avec une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
(c) Transformation de Fourier dans S. Formule d'inversion. Transformation de Fourier et dérivation, transformée de Fourier d'un produit de convolution.
12.3 Applications
Calcul de dérivées et de transformée de Fourier de distributions. Formule de Poisson (dimension un). Utilisation de la convolution et de la transformée de Fourier-Laplace pour la résolution d'équations différentielles linéaires en dimension un. Notion de solution élémentaire d'opérateurs différentiels à coefficients constants (cas du laplacien). Notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires : application, par exemple, à la résolution des équations de Laplace, de la chaleur, des ondes.

Leçon 201 : possibilité de parler de l'espace de Schwartz
Leçon 205 : La construction de l'espace $H^1_0(]0,1[)$ pourra être abordée par les candidat.es qui le souhaitent avec des applications illustrant l'intérêt de cet espace.
Leçon 207 : On peut également parler de l'extension à L^2, voire à l'espace des distributions tempérées, de la transformation de Fourier.
Leçon 213 : La construction de l'espace de Hilbert-Sobolev $H^1_0(]0,1[)$ pourra donc éventuellement être abordée...
Leçon 222 : Pour aller plus loin, la notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires peut également être présentée, avec des applications à la résolution des équations de Laplace, de la chaleur, des ondes, ou de l'équation de transport
Leçon 228 : Le nouvel intitulé doit conduire à analyser la généralisation de la notion de dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à l'aide du principe de calcul « par dualité/transposition » de la théorie des distributions. Plus qu'une analyse fonctionnelle poussée, le jury attend une certaine familiarité avec le calcul de dérivées faibles, dans ce cadre particulier de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qu'on n'hésitera pas à motiver par des applications (en physique, en théorie du signal,...). On peut étudier les liens entre dérivée classique et dérivée faible, calculer la dérivée faible de fonctions discontinues (formule des sauts, par exemple pour des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$ comme la fonction de Heaviside, la valeur absolue) ou de fonctions du type $x \to \int_a^x f(t)dt$, f étant intégrable. On peut aussi relier la dérivée faible et la limite du taux d'accroissement au sens des distributions et établir le lien entre fonction croissante et dérivée faible positive. Il est également possible de parler du peigne de Dirac. Pour aller encore plus loin, des exemples de convergence au sens des distributions peuvent tout à fait illustrer cette leçon.
Leçon 229 : ...Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.
Leçon 241 : Pour aller plus loin, on pourra présenter comment identifier la limite au sens des distributions d'une famille qui régularise la masse de Dirac..
Leçon 250 Pour aller plus loin, la transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre. Des

exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être donnés dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de Fourier de la valeur principale de $1/x$.

Introduction aux distributions

Le concept (révolutionnaire) de distribution est plus un point de vue nouveau sur les fonctions, qui permet de voir certaines « fonctions », la masse de Dirac en 0, la fonction de Heavyside, ... considérées tout le temps par les physiciens, comme de vraies « fonctions généralisées » (distributions, donc). Je vous recommande à ce sujet le livre de Bony (Cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier) qui dédramatise complètement ce point de vue.

Exercice 1 (Définition) Prendre votre livre préféré sur les distributions, et y lire la définition d'une distribution comme forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (resp. $C_0^\infty(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$), avec la bonne notion de continuité. On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des distributions sur $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathcal{D}'(\Omega)$ sur Ω) et on note plutôt $< T, \varphi >$ que $T(\varphi)$ pour insister sur l'aspect dualité.

En déduire la notion de suite convergente de distributions.

Exercice 2 (Dirac) Soit $f_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction qui vaut 0 sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0, \varepsilon)$ et est positive et d'intégrale 1. Montrez que pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon \times \varphi dx \to \varphi(0)$.

On note $\delta_0 : \varphi \to \varphi(0)$ la distribution limite.

Exercice 3 (Ordre d'une distribution) a) Qu'est-ce qu'une distribution d'ordre p ? (attention à l'ordre des quantificateurs)
b) Vérifiez que la distribution de Dirac est d'ordre 0.
c) Vérifiez que la distribution $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \varphi^{(k)}(0)$ est une distribution d'ordre au plus k.
d) Montrez qu'elle est d'ordre exactement k.

Exercice 4 (Une fonction est une distribution) On rappelle que $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des fonctions f qui sont intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. Montrez que $\varphi \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$ définit bien une distribution.

Exercice 5 (Dipôle) Soit g_j la fonction qui vaut j^2 sur $]0, 1/j[$, $-j^2$ sur $]-1/j, 0[$ et 0 sinon. Montrez qu'elle converge, lorsque $j \to \infty$, au sens des distributions, vers la distribution $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \varphi'(0)$.

Plus généralement, un *multipôle* est une distribution du type $\varphi \to \partial^\alpha \varphi(a)$ sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

Exercice 6 (Dérivation) On définit la dérivée d'une distribution par dualité (IPP, Stokes,...) $< T', \varphi >= - < T, \varphi' >$ sur $\mathbb{R}$ ou encore $\partial_{x_i} T, \varphi >= - < T, \partial_{x_i}\varphi >$ dans $\mathbb{R}^d$. En particulier, une distribution est toujours infiniment dérivable. C'est assez génial, non ?

Vérifiez que si $T_n \to T$ au sens des distributions, alors leurs dérivées convergent aussi $T'_n \to T'$.

Exercice 7 (Heavyside) Soit $H(x) = 1$ si $x > 0$ et $H(x) = 0$ si $x \leq 0$. Calculez ses dérivées première et seconde au sens des distributions.

Exercice 8 (valeur principale de $1/x$**)** Soit f_ε la fonction qui vaut $1/x$ si $|x| \geq \varepsilon$ et 0 sinon.
a) Vérifiez que les f_ε convergent au sens des distributions vers une distribution limite, notée $vp(\frac{1}{x})$. (L'imparité de $x \to 1/x$ sera utile...)
b) Démontrez que cette distribution est d'ordre au plus 1.
c) Démontrez que cette distribution est d'ordre exactement 1.

Exercice 9 (Mesures de Radon) Une mesure de Radon $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$ est une mesure borélienne positive finie sur les compacts.
a) Vérifiez que μ définit une distribution d'ordre 0 par $\varphi \to \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\mu$
b) Montrez qu'une distribution d'ordre 0 qui est *positive*, i.e. $T(\varphi) \geq 0$ pour toute fonction test φ qui est positive, définit une mesure de Radon.

Exercice 10 (Intégration par parties, Stokes) Soit f une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$. Vérifiez que sa dérivée au sens des distributions coincide avec sa dérivée usuelle.

Même question sur $\mathbb{R}^d$ si vous êtes à l'aise avec la formule de Stokes.

Exercice 11 (Formule des sauts en dimension 1**)** SOoit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction C^1 par morceaux (i.e. il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 \cdots < a_N = b$ telle que sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$ la restriction de f est C^1, et se prolonge en une appliction C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$ (sauf éventuellement en a et b).

On note dans cet exercice $D(f) \in \mathcal{D}'(]a, b[)$ la dérivée au sens des distributions de f, et f' sa dérivée sur $]a, b[\setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_N\}$. Alors, montrez que

$$D(f) = f' + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i} \, .$$

Exercice 12 (Dérivées et primitives) Soit $f \in C^0(]a,b[)$, et $c \in]a,b[$. Montrez qu'alors, la fonction $F : x \in]a,b[\to \int_c^x f(t)dt$ est une application C^1 de dérivée (au sens classique) $F' = f$.

Si $f \in L^1(]a,b[)$, montrez que la fonction $F : x \in]a,b[\to \int_c^x f(t)dt$ est une application continue sur $]a,b[$ de dérivée au sens des distributions égale à f.

Exercice 13 (Support d'une distribution) Le support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est le complémentaire du plus grand ouvert $\omega \subset \Omega$ sur lequel T est nulle (i.e. si $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ prolongée par 0 à $\Omega \setminus \omega$, $T(\varphi) = 0$).

Montrez qu'une distribution à support compact est d'ordre fini.

Exercice 14 (Distribution à support compact) On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact sur Ω. Montrez qu'une distribution de $\mathcal{E}'(\Omega)$ s'identifie à une forme linéaire continue sur $C^\infty(\Omega)$.

Opérations sur les distributions

La philosophie est toujours la même, celle d'une opération duale de celle sur les fonctions.

Ainsi, la translatée d'une fonction est $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x-a)$, et on a

$$\int \tau_a\varphi \times \psi dx = \int \varphi \times \tau_{-a}\psi dx$$

de sorte qu'on définit, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\tau_a(T)$, par la relation

$$< \tau_a(T), \varphi >=< T, \tau_{-a}\varphi >$$

.

Exercice 15 (Dilatation) On définit la dilatation d'un facteur λ de φ comme $x \to \varphi(\frac{x}{\lambda})$. Prolonger cette opération de dilatation à $\mathcal{D}'$

Exercice 16 (Multiplication par une fonction) Soit $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Définir la distribution $f.T$ (multiplication de T par f).

Convolution, EDP

Exercice 17 Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, vérifiez la relation

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g(z)\varphi(z)dz = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy\,.$$

Déduisez-en la définition de la convolution $T * S$ de deux distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

La convolution est-elle associative ?

Exercice 18 (Solution élémentaire d'une EDP) On considère une EDP linéaire à coefficients constants, du type

$$\sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha u = f\,,$$

où la somme est finie, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice, ∂^α désigne l'opérateur de dérivation (au sens faible) associée $\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$, u est la solution cherchée et f donnée dans l'énoncé.

On appelle solution élémentaire de cette EDP une distribution E telle que $\sum_\alpha \partial^\alpha E = \delta_0$.

Vérifiez que si $f \in \mathcal{D}'$, alors $E * f$ est solution de $\sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha u = f$.

Une solution élémentaire n'est pas nécessairement unique, sauf si on demande des conditions supplémentaires (du style tendre vers 0 à l'infini). mais elle a le mérite d'exister souvent et de permettre de retrouver des solutions de l'EDP avec second membre.

Exercice 19 (Laplacien) Considérons l'opérateur de Laplace

$$\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

On note $r = |x|$ dans $\mathbb{R}^d$. On souhaite montrer que $\Delta E = \delta_0$ avec E la distribution définie par $E = r/2$ si $d = 1$, $E = \frac{1}{2\pi}\log r$ si $d = 2$ et $E = -\frac{1}{s_d(d-2)}\frac{1}{r^{d-2}}$ si $d \geq 3$.

a) Dans chacun des cas, définir une fonction f_ε de classe C^2 qui vérifie $f_\varepsilon(x) = E(x)$ si $|x| \geq \varepsilon$ et $f_\varepsilon(x) = a_\varepsilon.r^2 + b_\varepsilon$ si $r \leq \varepsilon$.

b) Calculer Δf_ε

c) En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, en déduire le résultat voulu.

Exercice 20 (Cauchy Riemann) Dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, soit $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$. Vérifiez que $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{1}{\pi z}\right) = \delta_0$ par la même méthode qu'à l'exercice ci-dessus.

Exercice 21 (Opérateur de la chaleur) Dans $\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ on définit l'opérateur de la chaleur $\mathcal{C} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$. Montrez qu'alors la fonction $\Gamma(t,x) = \mathbf{1}_{]0,\infty[}(t)\dfrac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-|x|^2/4t}$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{d+1})$ et vérifie $\mathcal{C}\Gamma = \delta_0$.

Espaces de Sobolev

Exercice 22 On définit $H^1(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont la dérivée au sens faible est encore dans L^2. L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est-il dense dans $H^1(\Omega)$ au sens des distributions ?

Exercice 23 Les espaces de Sobolev sont les bons espaces pour résoudre des EDP. En EDP, on aime chercher des solutions parfois avec condition de Dirichlet, i.e. des solutions d'EDP vérifiant $u = 0$ sur $\partial\Omega$.
a) Soit $\Omega = B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^d$. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pourquoi n'est-il pas possible de demander naivement que $u = 0$ sur $\partial\Omega$?
b) Comment définit-on toutefois le sous-espace $H_0^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$ des éléments vérifiant au sens faible $u = 0$ sur $\partial\Omega$?

Espace de Schwartz

Exercice 24 Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\hat{f}(x)dx.$$

a) Quelle serait la définition naturelle de transformée de Fourier que cette égalité inspire ?
b) Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est en général pas dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.
c) En quoi est-ce un problème pour définir la transformée de Fourier d'une distribution ?

Exercice 25 (Espace de Schwartz) On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions φ qui sont C^∞ et qui sont, ainsi que toutes leurs dérivées, à décroissance rapide, i.e. pour tout $p \in \mathbb{N}$, les quantités

$$\mathcal{N}_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|\le p, |\beta|\le p} \left\| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right\|_\infty$$

sont finies.
a) Vérifier que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \ge 1$.
b) Vérifier que le produit d'une gaussienne par un polynôme est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
c) Vérifier que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation d'une part, et par multiplication par un polynôme d'autre part.

Exercice 26 (Transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors
a) $\partial_{x_j}(\mathcal{F}(\varphi)) = \mathcal{F}((-ix_j\varphi(x))$, et
b) $\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi)(\xi) = i\xi_j\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$.
Autrement dit, la transformée de Fourier "transforme dérivation en multiplication par ξ et inversement".

Exercice 27 (Transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz, bis) Montrer que l'espace de Schwartz est stable par transformée de Fourier, que de plus, il existe pour tout $p \in \mathbb{N}$ une constante C_p telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{N}_p(\hat{\varphi}) \le C_p \mathcal{N}_{p+d+1}(\varphi)$$

et que la transformée de Fourier est un isomorphisme d'ev, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^d}\bar{\mathcal{F}}$. AJOUTER NORMES

Exercice 28 (Distribution tempérée) Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est dite tempérée s'il existe $p \ge 0$ et $C > 0$ tq pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$| < T, \varphi > | \le C\mathcal{N}_p(\varphi)\,.$$

Vérifiez qu'une distribution tempérée se prolonge de manière unique en une forme linéaire, toujours notée T, sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, vérifiant l'estimée ci-dessus. On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées.

Exercice 29 (Exemples de distributions tempérées) Montrer que dans chacun des cas suivants, on définit bien une distribution tempérée.

- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et $T_f : \varphi \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$.
- Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et $T_f : \varphi \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$.

- Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est majorée ainsi $|f(x)| \leq C(1+|x|^N)$, et $T_f : \varphi \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$.
- Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une distribution à support compact

Exercice 30 (Transformée de Fourier d'une distribution tempérée) Vérifiez que la relation

$$< \hat{T}, \varphi > = < T, \hat{\varphi} >$$

permet de définir la transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, comparez sa transformée de Fourier usuelle avec sa transformée de Fourier au sens des distributions.

Exercice 31 (premiers pas) Calculez la transformée de Fourier d'une fonction constante ? de δ_0?

Exercice 32 (Transformée de Fourier de la valeur principale de $1/x$) a) La distribution $vp(1/x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est-elle une distribution tempérée ?
b) Si oui, calculez sa transformée de Fourier.

Exercice 33 La relation $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u) \times \mathcal{F}(v)$ a-t-elle un sens lorsque u et v sont des distributions ? Sous quelles restrictions ? Lorsque tous les termes de cette égalité sont bien définis, cette égalité est-elle encore vraie?