Universit de Picardie Jules Verne **Anne 2008-2009**
Licence de Mathmatiques L3 **Probabilités**

Devoir de Probabilités
Exercices 3 à 6 à rendre pour la semaine du 4 mai 2009

Exercice 1 Refaire soigneusement toutes les démonstrations faites lors des cours hors les murs (fin chapitre 2 et chapitre 3). Les rédiger et les rendre en cas de doute.

Exercice 2 Chercher les exercices de la fin de la feuille 3 et ceux de la feuille 4.

Exercice 3 On considère une machine automatique à lancer des balles de tennis à un joueur s'entraînant seul. Elle lance des balles à vitesse 1, selon un angle $\alpha \simeq \pi/4$ avec l'horizontale. La machineà lancer ayant déjà beaucoup servi, elle possède un jeu vertical que l'on modélise en supposant que l'angle de tir au lieu d'être constant égal à α est une variable aléatoire $\alpha = A(\omega)$ de loi uniforme sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4} - \epsilon, \frac{\pi}{4} + \epsilon]$, $0 < \epsilon < \pi/4$. Soit $T(\omega)$ le temps nécessaire pour que la balle atteigne le sol, et $D(\omega)$ sa distance à la machine à cet instant.
a) Supposons ici A constante égale à α. À l'aide de la loi fondamentale de la dynamique, montrer que la trajectoire est donnée par $t \geq 0 \mapsto (x(t) = t\cos\alpha, y(t) = \frac{-gt^2}{2} + t\sin\alpha)$. En déduire le temps que met la balle à atterrir, et la distance au sol parcourue.
b) On revient au cas où A est une v.a. de loi uniforme sur $[\frac{\pi}{4} - \epsilon, \frac{\pi}{4} + \epsilon]$. Exprimer les variables aléatoires T et D en fonction de la variable aléatoire A.
c) Calculer les lois des variables T et D (*On donnera l'expression de leur densité. Attention,* $x \mapsto \sin(2x)$ *n'est pas bijective pour* x *proche de* $\pi/4$).

Exercice 4 soient X et Y deux v.ar. indépendantes de même loi de densité

$$x \mapsto cxe^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}.$$

1) Déterminer la constante c

2) Déterminer la loi du couple (X, Y).

3) On pose $S = \dfrac{X+Y}{2}$ et $U = \dfrac{X-Y}{2}$. Déterminer la loi de (S, U).

4) Déterminer les densités de S et U. Sont elles indépendantes ?

Exercice 5 On note $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ l'ensemble de tous les nombres premiers de $\mathbb{N}$.

1) On souhaite montrer tout d'abord[1]

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

a) Montrer que $\sum_{p\in\mathcal{P}} 1/p < +\infty$ si et seulement si la suite $(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-1/p_i})_n$ admet une limite finie λ en $+\infty$.

b) En utilisant le fait que $\dfrac{1}{1-1/p} = \displaystyle\sum_k \frac{1}{p^k}$, montrer que $\lambda \geq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Conclure.

2) En utilisant les lemmes de Borel Cantelli, montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}$ telle que la mesure des entiers divisibles par n vaut $1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

[1] *A contrario*, le mathématicien norvégien Brun prouva que la série des inverses des nombres premiers jumeaux (nombre premier p tq $p+2$ est également premier, par ex : 3) est convergente. On conjecture qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux. Le résultat de Brun ne permet pas de trancher. Le plus grand nombre premier jumeau connu est $2003663613 \times 2^{195000} - 1$

Exercice 6

Soit φ la fonction rélle définie par $\varphi(u) = \dfrac{u}{1+u^2}$. Pour une v.a. réelle X on définit une fonction réelle Φ_X par $\Phi_X(t) = E\left(\varphi(tX)\right)$ $(t \in \mathbb{R})$.

1. Vérifier que φ est bornée, impaire, continue, dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que Φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}$, bornée et impaire.
3. Calculer Φ_X pour X une v.a. de Bernoulli de paramétre p et une v.a. uniforme sur $[0,1]$.
4. a) Montrer que si X et Y ont même loi (i.e. $P_X = P_Y$) alors $\Phi_X = \Phi_Y$.
b) Que vaut Φ_X dans le cas où X est symétrique (i.e. X et $-X$ ont même loi) ?
c) Φ_X caractérise-t-elle la loi de X ?
5. a) Montrer que Φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $\lim_{t\to\pm\infty} \Phi_X(t) = 0$.
6. a) Montrer que si X est intégrable alors Φ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que Φ_X reste dérivable sur $\mathbb{R}^*$ même si X n'est pas intégrable.
c) Montrer que si $X \geq 0$ et $E(X) = +\infty$ alors Φ_X n'est pas dérivable en 0
(*indication :* Montrer que $n\Phi_X(1/n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$).