Université Rennes 1
F. Maucourant et B. Schapira

Groupes de Lie - Devoir Maison préliminaire

Algèbre linéaire

Avant de commencer, êtes vous parfaitement au clair sur les points suivants :

1. Valeur propre, vecteur propre
2. sous-espace propre, sous-espace caractéristique, sous-espace stable
3. polynôme minimal et caractéristique
4. endomorphisme diagonalisable.

Exercice 1 (Echauffement) Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie. Un endomorphisme f de E dans E est dit *semi-simple* si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire stable.

1. Montrez que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire euclidien, et que f est symétrique, alors f est semi-simple.
2. Montrez que si E est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien, et que f est hermitien, alors f est semi-simple.
3. Montrez que si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, un endomorphisme est semi-simple si et seulement si il est diagonalisable.
4. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, donnez des exemples d'endomorphismes semi-simples non diagonalisables.
5. Donnez des exemples d'endomorphismes non semi-simples (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Exercice 2 (Diagonalisation simultanée) Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Soient $f_1, \cdots, f_k$ des endomorphismes de E qui commutent deux à deux. Montrez que si $f_1, \cdots f_k$ sont diagonalisables, alors ils sont simultanément diagonalisables, i.e. il existe une base dans laquelle ils sont tous diagonalisables.

Indication : montrez que les espaces propres de f_1 sont stables par les f_i, $2 \leq i \leq k$, et faites une récurrence sur la dimension.

Exercice 3 (La décomposition $D + N$) Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, i.e de la forme $P(X) = \Pi_{k=1}^{r}(X - \lambda_k Id)_k^{\alpha}$. Montrez que f s'écrit de manière unique sous la forme $f = d + n$, avec :
∗ d un endomorphisme diagonalisable
∗ n un endomorphisme nilpotent, i.e. dont le polynôme caractéristique est de la forme X^d.
∗ $nd = dn$
∗ n et d sont des polynômes en f
Indication: il est judicieux de décomposer E en somme de sous-espaces caractéristiques et de considérer les projecteurs sur ces sous-espaces.
En vidéo, `https://www.youtube.com/watch?v=5QnLCcX-vkI`

Exponentielle de matrices

Avant de commencer, êtes-vous au point sur l'exponentielle réelle ou complexe ? C'est la série entière définie par $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Si vous avez besoin de rappels, allez relire les deux premières pages de Rudin, *Analyse réelle ou complexe.*

Exercice 4 (Exponentielle de matrices) Considérons l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$ munie d'une norme quelconque. Rappelons que l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{C})$ est complet. Définissons

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrez les points suivants.
$*$ Cette expression définit une fonction continue de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$.
$*$ $\exp(0) = Id$
$*$ $(\exp(X))^* = \exp(X^*)$
$*$ $\exp(X)$ est inversible d'inverse $\exp(-X)$
$*$ Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors $\exp((\alpha+\beta)X) = \exp(\alpha X)\exp(\beta X)$
$*$ Si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.
$*$ Si $C \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $\exp(CXC^{-1}) = C\exp(X)C^{-1}$.
$*$ L'application $c_X : t \in \mathbb{R} \to \exp(tX) \in M_n(\mathbb{C})$ est une courbe C^∞, de dérivée en $t = t_0$ $c'_X(t_0) = X\exp(t_0X)$.

Exercice 5 (Calculs d'exponentielles de matrices) Calculez l'exponentielle de A dans les cas suivants.
$*$ A est une matrice diagonale.
$*$ A est une matrice diagonalisable.
$*$ A est nilpotente.
$*$ $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$,

Exercice 6 (Décomposition polaire) Nous voulons montrer que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = UP$, avec U une matrice unitaire ($U^*U = I_n$) et P une matrice hermitienne positive, et étudier quelques cas particuliers.

1. Soit Q une matrice hermitienne positive (i.e. $Q^* = Q$ et les valeurs propres de Q sont positives. Montrez qu'il existe une unique *racine carrée* hermitienne positive de Q, i.e. une matrice hermitienne positive dont le carré vaut Q.

2. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ s'écrit sous la forme $A = UP$, avec $U^*U = I_n$ et P une matrice hermitienne positive, vérifiez que $P^2 = A^*A$.

3. Déduisez-en le résultat voulu (existence et unicité de la décomposition polaire)

4. On admet (voir la définition du log matriciel, par ex Hall, ch.2) que toute matrice hermitienne positive P s'écrit sous la forme $P = e^X$, avec X une matrice hermitienne.

5. Lorsque $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrez que cette décomposition donne $A = R\exp(X)$ avec $R \in O_n(\mathbb{R})$ et X une matrice réelle symétrique.

6. Lorsque $A \in SL_n(\mathbb{C})$, montrez que $A = Ue^X$ avec $U \in SU(n)$ et X une matrice hermitienne de trace nulle.

7. Lorsque $A \in SL_n(\mathbb{R})$ montrez que $A = Re^X$ avec $R \in SO(n)$ et X réelle symétrique de trace nulle.

Références possibles :
R. Mansuy et R. Mneimné, *Algèbre linéaire*
W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*
B. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*