Théorie ergodique des actions de groupes

Résumé du Cours M2, Rennes 2015/2016

15 avril 2016

Table des matières

Chapitre 1

Introduction-Motivation

1.1 Rappels concernant la théorie ergodique classique

Rappels concernant la théorie ergodique d'une transformation $T : X \to X$ d'un espace de probabilité $(X, \mathscr{B}, m)$ préservant une mesure de probabilité, en abrégé transformation p.m.p.

- Ergodicité de T ;
- Exemples d'actions ergodiques : rotation irrationnelle, décalage de Bernoulli, automorphisme d'un tore, flots ergodique et horocyclique d'une surface ;
- Méthodes hilbertiennes pour montrer l'ergodicité (analyse de Fourier).

1.2 Théorie ergodique des actions de groupes

Le cadre est la donnée d'un groupe G agissant par transformation sur un espace mesuré $(X, \mathscr{B}, m)$, la mesure m n'étant pas nécessairement finie ni même préservée par G, mais non singulière (c-à-d m est quasi-invariante). Le cas classique d'une transformation correspond à une action du groupe **Z**.

1.2.1 Motivations

Voici quelques exemples de situations qui motivent l'étude de la théorie ergodique d'un groupe G de transformations :

- Marches aléatoires : par exemple, étant données des transformations $T_1, \ldots, T_N$ de (X, m), on s'interesse à la répartition de l'orbite de $x \in X$ sous l'action de

$T_1^{\pm 1}, \ldots, T_N^{\pm 1}$, une de ces transformations étant choisie à chaque pas avec probabilité $1/2N$. A titre d'exemple, on peut considérer les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et le sous-groupe G de $SL_2(\mathbf{Z})$ qu'elles engendrent. Alors G agit par automorphismes sur le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2$ et on peut s'intéresser à l'ergodicité et au mélange d'une telle action ou bien à la vitesse avec laquelle la marche aléatoire converge vers la mesure uniforme sur $\mathbf{T}^2$.

– Géométrie : les flots ergodique et horocyclique d'une surface Σ de genre ≥ 2 sont en fait la restriction à des sous-groupes à un paramètre (copies de $\mathbf{R}$) de l'action naturelle du groupe $G = SL_2(\mathbf{R})$ sur l'espace de probabilité G/Γ, ou $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ est le groupe fondamental de Σ.
– Algèbre, théorie des nombres : le comptage de solutions entières d'équations polynomiales se ramène souvent à des comptages d'orbites de réseaux de groupes de Lie ou algébriques, comme par exemple l'asymptotique de $\mathrm{Card}\{g \in SL_n(\mathbf{Z}) : \|g\| \leq R\}$ quand $R \to \infty$ pour une norme sur l'espace des matrices. Dans l'étude des valeurs de formes quadratiques sur le réseau des entiers, on est également amené à étudier des orbites (et donc des actions) d'un groupe sur un espace (souvent homogène) ; ainsi, la célèbre conjecture d'Oppenheim a été résolue par Margulis à travers une analyse des orbites d'une copie du groupe $SL_2(\mathbf{R})$ dans l'espace $SL_3(\mathbf{R})/SL_3(\mathbf{Z})$.

Chapitre 2

Actions mesurées de groupes

2.1 Groupes et actions de groupes

2.1.1 Groupes localement compacts

Définition 2.1.1 (Groupes localement compacts) Un groupe localement compact, en abrégé g.l.c., est un groupe topologique G tel que tout élément $g \in \mathrm{G}$ possède une voisinage compact. On supposera *toujours* que G possède une base dénombrable d'ouverts.

Exemple 2.1.2 Principaux exemples de groupes rencontrés dans ce cours :

1. Groupes compacts : $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{S}p(n)$, $\mathbf{Z}_p$, $\prod_n \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \ldots$
2. Groupes de Lie : $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{SO}(p,q)$, $\mathrm{S}p_n(\mathbf{R}), \ldots$
3. Groupes (dénombrables) discrets : $\mathbf{Z}^n$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, $\oplus_n \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{N}}$ (groupe libre sur N générateurs), ...

Théorème 2.1.3 *Soit* G *un g.l.c. (groupe localement compact) et* $\mathscr{B}$ *la tribu des boréliens de* G.

1. *Il existe une unique mesure* m_{G} *sur* $\mathscr{B}$ *telle que*
   - m_{G} *est invariante par translation à gauche :* $m_{\mathrm{G}}(g\mathrm{A}) = m_{\mathrm{G}}(\mathrm{A})$ *pour tout* $g \in \mathrm{G}$ *et tout* $\mathrm{A} \in \mathscr{B}$
   - $m_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) > 0$ *pour tout ouvert non vide* U *de* G
   - $m_{\mathrm{G}}(\mathrm{K}) < \infty$ *pour tout compact* K *de* G
2. m_{G} *est unique au sens suivant : si* μ *est une mesure sur* $\mathscr{B}$ *vérifiant les propriétés (1), alors* $\mu = c\, m_{\mathrm{G}}$ *pour un* $c > 0$

3. *m_G est finie si et seulement si* G *est compact.*

Démonstration Admis : voir par exemple la monographie [Foll95] ■

Définition 2.1.4 (Mesure de Haar) La mesure m_G est appelée *mesure de Haar* (à gauche) de G.

Définition 2.1.5 (Fonction modulaire) Pour tout $g \in G$, la mesure

$$m_g : A \mapsto m_G(gA)$$

est invariante par translation à gauche et est donc un multiple de m_G : il existe $\Delta_G(g) > 0$ tel que $m_g = \Delta_G(g) m_G$. La fonction $g \mapsto \Delta_G(g)$ est un homomorphisme continu $G \to \mathbf{R}_+^*$, appelé *fonction modulaire* de G. Si $\Delta_G = 1_G$, le groupe est dit *unimodulaire* (ses mesures de Haar sont bi-invariantes).

Exemple 2.1.6

1. G discret : m_G mesure de comptage ; G est unimodulaire
2. $G = \mathbf{R}^n$: m_G mesure de Lebesgue ; G est unimodulaire
3. $G = \mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ mesure de Lebesgue ; G est unimodulaire
4. $G = GL_n(\mathbf{R})$: $m_G = \det(X)^{-n} \prod_{1\leq i,j\leq n} dx_{ij}$ pour $X = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in G$; G est unimodulaire
5. G le groupe "$ax + b$", c-à-d le groupe des transformations affines
$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto ax + b :$$
$dm_G(a, b) = dadb/|a|^2$; G n'est pas unimodulaire : $\Delta_G(a, b) = 1/|a|$;
6. Le groupe de Heisenberg
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbf{R} \right\} :$$
m_G est la mesure de Lebesgue $dm_G(x, y, z) = dxdydz$; G est unimodulaire
7. $G = SL_2(\mathbf{R})$: m_G est la mesure $\dfrac{dxdy}{y^2} \otimes dk$, où $\dfrac{dxdy}{y^2}$ est la mesure G-invariante sur le demi-plan de Poincaré $\mathbf{H} = \{x + iy : x \in \mathbf{R}, y > 0\} \cong G/K$, pour $K = SO(2)$ et dk est la mesure de Lebesgue sur $K \cong \mathbf{S}^1$.

8. Soit G un groupe de Lie ; une mesure de Haar sur G peut être déterminée ainsi : soit ω_e une n-forme alternée sur l'espace tangent $\mathrm{T}_e(\mathrm{G})$ en e ($n = \dim \mathrm{G}$). Soit $\omega \in \wedge^n \mathrm{TG}$ la forme volume sur G donnée par

$$\omega_g = g(\omega_e) \qquad \text{pour tout} \quad g \in \mathrm{G}.$$

La mesure associée à ω est invariante par G.

2.1.2 Actions sur des espaces mesurés

Soient
- G un g.l.c.
- $(\mathrm{X}, \mathscr{B}, m)$ un espace mesuré, où $m : \mathscr{B} \to \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est une mesure positive que nous supposerons toujours σ-finie (mais pas nécessairement finie).

Définition 2.1.7 (Actions mesurables) Une action mesurable de G sur X, notée $\mathrm{G} \curvearrowright (\mathrm{X}, m)$, est une action telle que

$$\mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}, (g, x) \mapsto x$$

est mesurable et qui n'est pas singulière : m est quasi-invariant pour l'action de G, c-à-d gm et m sont des mesures équivalents, pour tout $g \in \mathrm{G}$. L'action est dite invariante si $gm = m$ pour tout g. Elle est dit p.m.p (préservant une mesure de probabilité) si elle est invariante et si m est une mesure de probabilité.

Soit $\mathrm{G} \curvearrowright (\mathrm{X}, m)$ une action mesurable. Pour $g \in \mathrm{G}$, on note $c(g,x) = \dfrac{dgm}{m}(x)$ la dérivée de Radon-Nikodym, de sorte que

$$\int_{\mathrm{X}} f(x)dm(x) = \int_{\mathrm{X}} c(g,x) f(gx) dm(x) \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, m).$$

Alors, on a la relation de cocycle

$$c(g_1 g_2, x) = c(g_1, g_2 x) c(g_2, x) \qquad \text{pour tout} \quad g_1, g_2 \in \mathrm{G}, x \in \mathrm{X}.$$

Exemple 2.1.8 1. Soit X une variété différentielle orientée et G un groupe de difféomorphismes de X. Soit $v \in \wedge^n \mathrm{TX}$ une forme volume sur X (avec $n = \dim \mathrm{X}$). La mesure $m = m_v$ sur X associée à v est quasi-invariante par G.

2. $G = SL_2(\mathbf{R})$ agit sur la droite projective $X = \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ par homographies ; la mesure de Lebesgue sur X est quasi-invariante (mais n'est pas invariante)
3. $G = SL_n(\mathbf{Z})$ agit sur le tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ en préservant la mesure de Lebesgue (l'action est p.m.p)
4. Soit Γ un sous-groupe discret de $G = SL_2(\mathbf{R})$. L'espace homogène $X = G/\Gamma$ possède une mesure m qui est G invariante (par translations à gauche) ; m est la mesure induite par m_G sur un domaine fondamental de Γ (c-à-d un borélien Ω de G tel qu'on ait une partition $G = \cup_{\gamma\in\Gamma}\Omega\gamma$). On obtient ainsi une action $H \curvearrowright (X, m)$ pour tout sous-groupe H de G. Les flots géodésiques et horocycliques d'une surface sont des cas particuliers de telles actions.

Nos espaces mesurés (X, m) seront souvent des espaces homogènes, du type G/H.

Théorème 2.1.9 ***(Mesures de Haar sur les espaces homogènes)*** *Soient* G *un g.l.c. et* H *un sous-groupe fermé.*

1. *Il existe une mesure σ-finie $m_{G/H}$ sur les boréliens de G/H qui est quasi-invariante sous l'action de G par translations à gauche. Cette mesure est unique à équivalence près et s'appelle la* mesure de Haar *de* G/H.
2. *La mesure $m_{G/H}$ est G-invariante (plus précisément : il existe une telle mesure dans la classe $m_{G/H}$) si et seulement si $\Delta_G|_H = \Delta_H$; dans ce cas, on a la formule de Weil*

$$\int_G f(g)dm_G(g) = \int_{G/H} dm_{G/H}(gH)\int_H f(gh)dm_H(h) \qquad \textit{pour tout} \quad f \in C_c(G),$$

pour un choix convenable des mesures de Haar m_G, m_H de G, H.

Démonstration Admis : voir par exemple la monographie [Foll95]. ■

2.1.3 Actions ergodiques

Soit G un g.l.c. et $G \curvearrowright (X, \mathscr{B}, m)$ une action sur un espace mesuré, m n'étant pas nécessairement invariante, ni finie.

Définition 2.1.10 (Action ergodique) L'action $G \curvearrowright (X, \mathscr{B}, m)$ est *ergodique* si, pour tout $A \in \mathscr{B}$ tel que $gA = A$ pour tout $g \in G$, on a soit $m(A) = 0$ soit $m(X\setminus A) = 0$.

Une fonction $f : X \to \mathbf{R}$ est dite G-*invariante* si

$$f(gx) = f(x) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G, x \in X.$$

Une fonction $f : X \to \mathbf{R}$ est dite *essentiellement* G-*invariante* si, pour tout $g \in G$, on a $f(gx) = f(x)$ pour m-presque tout $x \in X$.

Proposition 2.1.11 *Soit* $G \curvearrowright (X, m)$ *une action mesurable. Pour toute fonction mesurable et essentiellement* G-*invariante* $f : X \to \mathbf{R}$, *il existe une fonction mesurable et* G-*invariante* $\tilde{f} : X \to \mathbf{R}$ *telle que, m presque partout, on a* $\tilde{f} = f$.

Démonstration …

Corollaire 2.1.12 *Soit* $G \curvearrowright (X, m)$ *une action mesurable. Alors les propriétes suivantes sont équivalentes*

1. $G \curvearrowright (X, m)$ *est ergodique ;*
2. *toute fonction mesurable et essentiellement* G-*invariante* $f : X \to \mathbf{R}$ *est constante* m*-presque partout.*

Démonstration …

2.2 Représentations unitaires de groupes

Soit G un g.l.c. (comme toujours, avec une base dénombrable d'ouverts).

Définition 2.2.1 (Représentation unitaire) Une *représentation unitaire* de G est la donnée d'un couple $(\pi, \mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert (complexe le plus souvent) et $\pi : G \to \mathbf{U}(\mathcal{H})$ un homomorphisme dans le groupe

$$\mathbf{U}(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ : \ T^*T = TT^* = I\}$$

des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$, avec la condition de continuité suivante : pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, la fonction

$$G \to \mathcal{H}, \quad g \mapsto \pi(g)\xi$$

est continue.

Proposition 2.2.2 ***(Représentation régulière d'un groupe)*** *Soit* $\mathscr{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{G}, m_\mathrm{G})$ *et* $\pi_\mathrm{G} : \mathrm{G} \to \mathbf{U}(\mathrm{L}^2(\mathrm{G}))$ *définie par translations à gauche :*

$$(\pi_\mathrm{G}(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \qquad \textit{pour tout} \quad f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G}), g \in \mathrm{G}, x \in \mathrm{G}.$$

Alors π_G *est une représentation unitaire de* G.

Démonstration ... ■

Définition 2.2.3 **(Représentation régulière d'un groupe)** La représentation π_G définie plus haut est appelée la *représentation régulière* (gauche) de G.

Remarque 2.2.4 (i) La représentation régulière *droite* ρ_G de G peut être définie de la même manière, en tenant compte du fait que m_G n'est pas nécessairement invariante à droite :

$$(\rho_\mathrm{G}(g)f)(x) = \Delta_\mathrm{G}(g^{-1})f(xg) \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G}), g \in \mathrm{G}, x \in \mathrm{G}.$$

(ii) La *représentation triviale* 1_G de G est la représentation

$$\mathrm{G} \to \mathbf{C}, \quad g \mapsto 1.$$

2.3 Représentations unitaires associées à des actions

Soit G un g.l.c. et $\mathrm{G} \curvearrowright (\mathrm{X}, \mathscr{B}, m)$ une action sur un espace mesuré, m étant G-quasi-invariante (mais pas nécessairement invariante ni finie). Pour $g \in \mathrm{G}$, soit

$$c(g, x) = \frac{dgm}{m}(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{X}$$

la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure image gm par rapport à m. On définit $\pi_\mathrm{X}(g) : \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m) \to \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m)$ par

$$(\pi_\mathrm{X}(g)f)(x) = c(g^{-1}, x)^{1/2} f(g^{-1}x) \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m), x \in \mathrm{X}.$$

Alors $\pi_\mathrm{X}(g) \in \mathbf{U}(\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m))$.

Proposition 2.3.1 *L'application* $\pi_\mathrm{X} : \mathrm{G} \to \mathbf{U}(\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m))$ *est une représentation unitaire de* G.

Démonstration ... ■

Définition 2.3.2 (Représentation de Koopman) La représentation unitaire $(\pi_X, L^2(X, m))$ est appelée la *représentation de Koopman* associée à l'action $G \curvearrowright (X, \mathscr{B}, m)$.

Proposition 2.3.3 *Supposons que m soit une mesure de probabilité* G *invariante (en abrégé,* $G \curvearrowright (X, \mathscr{B}, m)$ *est p.m.p). Alors* $\mathbf{C}\mathbf{1}_X$ *est un sous-espace* G*-invariant, ainsi que son complément orthogonal*

$$L_0^2(X) = (\mathbf{C}\mathbf{1}_X)^\perp = \left\{ f \in L^2(X, m) \ : \ \int_X f \, dm = 0 \right\}.$$

Démonstration …■

Théorème 2.3.4 ***(Ergodicité par "Koopmanisme")*** *Soit* $G \curvearrowright (X, \mathscr{B}, m)$ *une action p.m.p. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $G \curvearrowright (X, \mathscr{B}, m)$;
2. *la restriction* π_X^0 *de* π_X *à* $L_0^2(X)$ *ne possède aucun vecteur* G*-invariant non nul :*
$$L_0^2(X)^G = \{0\};$$
3. *les constantes sont les seuls vecteurs* G*-invariants dans* $L^2(X, m)$:
$$L^2(X, m)^G = \mathbf{C}\mathbf{1}_X.$$

Démonstration …■

2.3.1 Exemples d'actions ergodiques de groupes

Actions par translations sur un groupe compact

Soit G un groupe compact, muni de sa mesure de Haar normalisée m_G.

Proposition 2.3.5 *Soit* H *un sous-groupe de* G. *L'action* $H \curvearrowright (G, \mathscr{B}, m_G)$ *par translations (à gauche ou à droite) est ergodique si et seulement si* H *est dense dans* G.

Démonstration …■

Exemple 2.3.6 (i) On retrouve l'ergodité des rotations irrationnelles : pour $G = \mathbf{S}^1$ et H le sous-groupe engendré par $e^{2\pi i \alpha}$, on voit que $H \curvearrowright \mathbf{S}^1$ est ergodique si et seulement si H est dense in G, c-à-d α est irrationnel.
(ii) Soient $G = \mathbf{T}^n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$. Soit H le sous-groupe de $\mathbf{T}^n$ engendré par $(e^{2\pi i \alpha_1}, \dots, e^{2\pi i \alpha_n})$. Alors $H \curvearrowright \mathbf{S}^1$ est ergodique si et seulement si H est dense in G, c-à-d $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Actions par automorphismes sur un groupe abélien compact

Soit A un g.l.c. *abélien.*

Définition 2.3.7 (Groupe dual) Le *groupe dual* de A est le groupe $\widehat{\mathrm{A}}$ formé de tous les homomorphismes continus $\chi : \mathrm{A} \to \mathbf{S}^1$, la loi de groupe étant donnée par la multiplication point par point.

Exemple 2.3.8

1. $\widehat{\mathbf{R}^n}$ s'identifie à $\mathbf{R}^n$ par
$$\mathbf{R}^n \to \widehat{\mathbf{R}^n}, \quad y \mapsto e_y,$$
avec $e_y(x) = e^{2\pi i x.y}, x.y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
2. $\widehat{\mathbf{Z}^n}$ s'identifie à $\mathbf{T}^n$ par
$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n \to \widehat{\mathbf{Z}^n}, \quad y + \mathbf{Z}^n \mapsto e_y,$$
avec $e_y(x) = e^{2\pi i x.y}, x.y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
3. $\widehat{\mathbf{T}^n}$ s'identifie à $\mathbf{Z}^n$ par
$$\mathbf{Z}^n \to \widehat{\mathbf{T}^n}, \quad y \mapsto e_y,$$
avec $e_y(x+\mathbf{Z}^n) = e^{2\pi i x.y}, x.y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
4. Le dual du corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques s'identifie à $\mathbf{Q}_p$.
5. Le dual de $\mathbf{Q}$, vu comme groupe discret, s'identifie au quotient $\mathbf{A_Q}/\mathbf{Q}$ de l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$ par le sous-groupe $\mathbf{Q}$ plongé diagonalement.

La *transformée de Fourier* $\mathscr{F} : \mathrm{L}^1(\mathrm{A}, m_\mathrm{A}) \to \mathrm{C}(\widehat{\mathrm{A}})$ de A est définie par
$$\mathscr{F}(f)(\chi) = \int_\mathrm{A} f(x)\chi(x)dm_\mathrm{A}(x) \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{A}), \chi \in \widehat{\mathrm{A}}.$$

Théorème 2.3.9 *Soit* A *un g.l.c.abélien.*

1. $\widehat{\mathrm{A}}$ *est un g.l.c*
2. $\widehat{\mathrm{A}}$ *est discret si et seulement si* A *est compact.*
3. ***(Dualité de Pontrjagin)*** *Le groupe dual de* $\widehat{\mathrm{A}}$ *s'dentifie à* A*; plus précisément : l'application* $\varphi : \mathrm{A} \to \widehat{(\widehat{\mathrm{A}})}$ *définie par* $\varphi(g)(\chi) = \chi(g)$ *est un isomorphisme topologique de groupes.*

4. ***(Théorème de Plancherel)*** *La transformée de Fourier, restreinte à* $L^1(A) \cap L^2(A)$, *s'etend à* $L^2(A, m_A)$ *en une isométrie bijective linéaire*

$$\mathscr{F} : L^2(A, m_A) \to L^2(\widehat{A}, m_{\widehat{A}})$$

pour des normalisations convenables de m_A *et* $m_{\widehat{A}}$.

Démonstration Admis : voir par exemple voir par exemple la monographie [Foll95]. ■

Remarque 2.3.10 (i) Soit Aut(A) le groupe des automorphismes continus $A \to A$. Pour tout $\theta \in \mathrm{Aut}(A)$, l'application

$$\widehat{\theta} : \widehat{A} \to \widehat{A}, \quad \chi \mapsto \chi \circ \theta$$

est un automorphisme continu de $\widehat{A}$. Ceci définit un homomorphisme

$$\mathrm{Aut}(A) \to \mathrm{Aut}(\widehat{A}), \quad \theta \mapsto \widehat{\theta}.$$

En particulier, si G est un groupe agissant par automorphismes sur A, on obtient une action (dite action duale) de G par automorphismes sur $\widehat{A}$.
(ii) Supposons que A est compact. Alors, après normalisation, m_A est une mesure de probabilité. La mesure m_A est préservée par θ car

$$\theta(m_A) : B \mapsto m_A(\theta^{-1}(B)) \qquad \text{pour tout} \quad B \in \mathscr{B}$$

est une mesure invariante par translations ; comme $\theta(m_A)$ est également une mesure de probabilité, on a $\theta(m_A) = m_A$.

Proposition 2.3.11 *Soit* A *un groupe abélien et compact. Soit* G *un g.l.c. avec une action par automorphismes sur* A. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'action* $G \curvearrowright (A, m_A)$ *est ergodique.*
2. *Toutes les orbites de* G *dans* $\widehat{A} \setminus \{1_A\}$, *pour l'action duale* $G \curvearrowright \widehat{A}$, *sont infinis.*

Démonstration ... ■

Exemple 2.3.12 1. **(Automorphismes de tores)** Pour $A = \mathbf{T}^n$, on a $\mathrm{Aut}(A) = GL_n(\mathbf{Z})$ et m_A est la mesure de Lebesgue. Pour un sous-groupe $G \subset \mathrm{Aut}(A)$, on a $G \curvearrowright \mathbf{T}^n$ est ergodique, si et seulement si toutes les orbites de G^t dans $\mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ sont finies.

2. **(Actions de Bernoulli)** Soit Γ un groupe dénombrable discret quelconque. Soit $X = \{0,1\}^\Gamma$, l'espace des suites $(\varepsilon_\delta)_{\delta\in\Gamma}$, avec $\varepsilon_\delta \in \{0,1\}$. Soit $m = \nu^{\otimes}\, \Gamma$, la mesure produit avec ν la mesure uniforme sur $\{0,1\}$. On définit une action p.m.p. $\Gamma \curvearrowright (X,m)$ par
$$\gamma((\varepsilon_\delta)_{\delta\in\Gamma}) = (\varepsilon_{\gamma^{-1}\delta})_{\delta\in\Gamma} \qquad \text{pour tout} \quad \gamma\in\Gamma.$$
On regarde $X = \{0,1\}^\Gamma$ comme le groupe abélien compact
$$A = \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \qquad \text{(produit direct)}.$$
On a
$$\widehat{A} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \qquad \text{(somme directe)}.$$
Alors $\Gamma \curvearrowright (X,m)$ est une action par automorphismes de A et l'action duale est donnée par
$$\gamma(\oplus_{\delta\in\Gamma}\varepsilon_\delta) = \oplus_{\delta\in\Gamma}\varepsilon_{\gamma^{-1}\delta} \qquad \text{pour tout} \quad \gamma\in\Gamma.$$
On obtient que $\Gamma \curvearrowright (X,m)$ est ergodique si et seulement si Γ est infini. En effet, le stabilisateur de chaque élément $\oplus_{\delta\in\Gamma}\varepsilon_\delta \in \widehat{A}\setminus\{1\}$ est fini (car l'action de Γ par translation sur lui-même est libre).

2.4 Actions mélangeantes de groupes

2.4.1 Actions fortement mélangeantes

Rappel : Une transformation p.m.p T d'un espace de probabilité $(X,\mathscr{B},m)$ est fortement mélangeante si, pour tous $A,B\in\mathscr{B}$, on a
$$m(T^{-n}A\cap B) \to_{n\to+\infty} m(A)m(B);$$
ceci équivaut à
$$\int_X U_T(f_1)\overline{f_2}\,dm \to_{n\to+\infty} \int_X f_1\,dm \int_X \overline{f_2}\,dm \qquad \text{pour tout} \quad f_1,f_2\in L^2(X),$$
où $U_T(f_1) = f_1\circ T$. Ceci équivaut encore à
$$\int_X U_T(f_1)\overline{f_2}\,dm \to_{n\to+\infty} 0 \qquad \text{pour tout} \quad f_1,f_2\in L^2_0(X).$$

Soit E un espace localement compact. On dira qu'une suite $(x_n)_n$ dans E tend vers l'infini, et on écrira $x_n \to \infty$, si, pour tout compact $K \subset E$, il existe N avec $x_n \notin K$ pour tout $n \geq N$. On note $C_0(E)$ l'espace des fonctions continues $\varphi : E \to \mathbf{C}$ qui tendent vers 0 à l'infini, c-à-d pour lesquelles on a $\lim_n \varphi(x_n) = 0$, pour toute suite $(x_n)_n$ dans E avec $x_n \to \infty$. On ecrira $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

Soit G un g.l.c. et $G \curvearrowright (X, m)$ une action p.m.p.

Définition 2.4.1 (Action fortement mélangeante) L'action $G \curvearrowright (X, m)$ est *fortement mélangeante* si, pour tous $f_1, f_2 \in L^2_0(X)$, le coefficient de correlation

$$C_{f_1,f_2} : G \to \mathbf{C}, g \mapsto \langle \pi_X(g) f_1, f_2 \rangle = \int_X (\pi_X(g) f_1) \overline{f_2} dm$$

appartient à $C_0(G)$.

Proposition 2.4.2 *Soit* G *un g.l.c. et* $G \curvearrowright (X, m)$ *une action p.m.p. fortement mélangeante. Soit* H *un sous-groupe de* G *d'adhérence non compacte. Alors* $H \curvearrowright (X, m)$ *est ergodique (et même mélangeante si* H *est fermé et non compact).*

Démonstration …■

2.4.2 Actions faiblement mélangantes

Rappel : Une transformation p.m.p T d'un espace de probabilité $(X, \mathscr{B}, m)$ est faiblement mélangeante si $U_T : L^2_0(X) \to L^2_0(X)$ ne possède pas de valeur propre ; ceci équivaut à l'ergodicité de la transformation $T \times T$ de $(X \times X, m \otimes m)$.

Définition 2.4.3 (Action faiblement mélangeante) L'action $G \curvearrowright (X, m)$ est *faiblement mélangeante* si la représentation $(\pi_X, L^2_0(X))$ de Koopman ne possède pas de sous-représentation de dimension finie non nulle : $\{0\}$ est le seul sous-espace vectoriel G-invariant de dimension finie de $L^2_0(X)$.

Théorème 2.4.4 *Soit* $G \curvearrowright (X, m)$ *une action p.m.p. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $G \curvearrowright (X, m)$ *est faiblement mélangeante ;*
2. $G \curvearrowright (X \times X, m \otimes m)$ *est ergodique, où* $G \curvearrowright (X \times X, m \otimes m)$ *désigne l'action diagonale donnée par*

$$g(x, y) = (gx, gy) \qquad \textit{pour tout} \quad g \in G, (x, y) \in X \times X.$$

Démonstration ...■

Exemple 2.4.5 L'action $SL_n(\mathbf{Z}) \curvearrowright \mathbf{T}^n$ est mélangeante (car $SL_n(\mathbf{Z}) \curvearrowright \mathbf{T}^n \otimes \mathbf{T}^n$ est ergodique). On observera qu'à la différence du mélange fort, le mélange faible n'est pas hérité par les sous-groupes fermés : par exemple, l'action du sous-groupe

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbf{Z} \right\}$$

sur $\mathbf{T}^2$ n'est pas même pas ergodique, car le caractère

$$\chi : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{S}^1, \quad \chi(x_1, x_2) = e^{2\pi i x_2}$$

est invariant par H.

2.5 Exercices

Exercice 2.5.1 (Densité des orbites d'une action ergodique) Soient G un groupe localement compact, X un espace métrique séparable et $G \curvearrowright X$ une action continue. Soit m une mesure G quasi-invariante sur les boréliens de X telle que $m(U) > 0$ pour tout ouvert non vide $U \subset X$. On suppose que m est ergodique pour l'action de G.

Montrer qu'il existe un ensemble borélien X' de X avec $m(X \setminus X') = 0$ tel que, pour tout $x \in X'$, l'orbite Gx de x est dense dans X.
[*Indication :* Soit $(U_n)_n$ une base dénombrable d'ouverts de X; que peut-on dire de $\cap_n(\cup_{g\in G}\, gU_n)$?]

Exercice 2.5.2 (Essentielle transitivité des actions ergodiques d'un groupe compact) Soient G un groupe compact, X un espace métrique séparable et $G \curvearrowright X$ une action continue. Soit m une mesure G quasi-invariante sur les boréliens de X. On suppose que m est ergodique pour l'action de G.

Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $m(X \setminus Gx) = 0$. En déduire une classification des actions ergodiques de G sur un espace métrique séparable muni d'une mesure quasi-invariante, à ensemble de mesure nulle près.
[*Indication :* Montrer d'abord que deux orbites distinctes de X peuvent être séparées par des ouverts G-invariants.]

Exercice 2.5.3 (Théorème de dualité de Moore) Soient G un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts et H_1, H_2 deux sous-groupes fermés de G.
(i) Montrer que l'action $H_1 \curvearrowright G/H_2$ est ergodique si et seulement si l'action $H_2 \curvearrowright G/H_1$ est ergodique

[*Indication :* On pourra utiliser le fait que, pour un sous-groupe fermé H, une fonction mesurable $f : G/H \to \mathbf{R}$ est 0 presque partout sur G/H si et seulement si elle est $f \circ p$ est 0 presque partout sur G, où $p : G \to G/H$ est l'application canonique.]

Exercice 2.5.4 (Groupe de Heisenberg) Soit G le sous-groupe de $GL_3(\mathbf{R})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $x, y, z \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer le centre Z de G ainsi que la structure de G/Z.
(ii) Montrer que G est topologiquement isomorphe à $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$, muni du produit $((x, y), s)((x', y'), t) = \big((x + x', y + y'), s + t + xy' - x'y))\big)$.
(ii) Montrer que la mesure de Lebesgue m on $\mathbf{R}^3$ est une mesure de Haar à gauche et à droite sur G.
(iii) Montrer que $SL_2(\mathbf{R})$ agit par automorphismes sur G
(iv) Montrer que $\Lambda = \{((x, y), s) \ : \ x, y \in \mathbf{Z}^2, s \in \mathbf{Z}\}$ est un réseau dans G et que l'action de $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$ sur G induit une action de Γ sur la nilvariété $X := N/\Lambda$ préservant une mesure de probabilité.

Exercice 2.5.5 (Actions faiblement mélangeantes) Soit G un groupe localement compact avec une action mesurable sur un espace de probabilité (X, m) préservant m.

On se propose de montrer que $G \curvearrowright (X, m)$ est faiblement mélangeante si et seulement si $G \curvearrowright (X \times X, m \otimes m)$ est ergodique.

Supposons que $G \curvearrowright (X, m)$ est faiblement mélangeante et soit k une fonction G-invariante dans $L^2_0(X \times X)$. Soit $K : L^2(X) \mapsto L^2(X)$ l'opérateur intégral défini par k.
(i) Montrer que K ainsi que K^* commutent avec tous les opérateurs $\pi_{X \times X}(g)$.
(ii) Montrer que K est un multiple de la projection orthogonale sur $\mathbf{C}\mathbf{1}_X$ et donc que k est constant $m \otimes m$ -presque partout.

[*Indication :* On pourra considérer la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints $T + T^*$ et $i(T - T^*)$.]

Supposons maintenant que $G \curvearrowright (X \times X, m \otimes m)$ est ergodique. Soit V un sous-espace de $L^2(X)$ qui est G-invariant et de dimension finie. Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base orthonormée de V. Soit $k \in L^2_0(X \times X)$ définie par $k(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x)\overline{f_i(y)}$.
(iii) Montrer que k est G-invariante et conclure que $V = \{0\}$.

Exercice 2.5.6 (Le mélange fort implique le mélange faible (ouf !)) Soit G un groupe localement compact, (X, m) un espace de probabilité et $G \curvearrowright (X, m)$ une action mesurable préservant m.
(i) On suppose que G est fortement mélangeante et que G n'est pas compact. Montrer que $G \curvearrowright (X, m)$ est faiblement mélangeante.

(ii) Montrer que si $G \curvearrowright (X, m)$ est faiblement mélangeante, il n'est pas vrai que $G \curvearrowright (X, m)$ est faiblement mélangeante pour tout sous-groupe fermé non compact H de G.

Exercice 2.5.7 (Mélange fort des actions de Bernoulli) Soit Γ un groupe dénombrable infini. Montrer que son action de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ sur $X = \{0, 1\}^{\Gamma}$ est fortement mélangeante.

Exercice 2.5.8 (Ergodicité d'actions ne préservant pas une probabilité) Soit Γ un réseau dans $SL_n(\mathbf{R})$, par exemple $\Gamma = SL_n(\mathbf{Z})$.
(i) Montrer que la restriction à Γ de l'action linéaire de $SL_n(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue, est ergodique.
(ii) Montrer que la restriction à Γ de l'action naturelle de $SL_n(\mathbf{R})$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{R}^n)$, muni de la mesure de Lebesgue, est ergodique.

[*Indication :* Pour (i) et (ii), utiliser l'Exercise 2.5.3.]

Chapitre 3

Le théorème du mélange de Howe-Moore

3.1 Rappels

Nous adopterons la définition suivante d'un groupe de Lie ; cette définition, bien que restrictive, sera amplement suffisante pour ce cours.

Définition 3.1.1 (Groupes de Lie simples)

- Un *groupe de Lie* (linéaire) est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ pour un $n \geq 1$. Par le théorème de Cartan, un tel groupe est une sous-variété de l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de $\mathbf{R}^{n^2}$.
- Un groupe de Lie connexe G est *simple* si tout sous-groupe distingué propre de G est fini

Exemple 3.1.2 (i) Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}), \mathrm{S}p_n(\mathbf{R}), \mathrm{SO}_0(p,q)$ sont des groupes de Lie simples.
(ii) Le groupe "$ax+b$", le groupe de Heisenberg, le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ sont des groupes de Lie qui ne sont pas simples.

Définition 3.1.3 (Réseaux de groupes localement compacts) Soit G un g.l.c. Un *réseau* dans G est un sous-groupe discret Γ tel que l'espace homogène G/Γ possède une mesure de Haar $m_{\mathrm{G}/\Gamma}$ qui est finie (c-à-d qu'il existe une mesure de probabilité G invariante sur les boréliens de G/Γ).

Exemple 3.1.4 (i) Le sous-groupe $\Gamma = \mathbf{Z}^n$ est un réseau dans $\mathrm{G} = \mathbf{R}^n$.

(ii) Les sous-groupes $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ et $\Gamma = \mathrm{S}p_n(\mathbf{Z})$ sont des réseaux dans $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{S}p_n(\mathbf{R})$, respectivement.
(iii) Soit Σ une surface compacte orientée de genre ≥ 2. Alors $\pi_1(\Sigma)$, le groupe fondamental de Σ, est un réseau dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$.

3.2 Énoncé du théorème de Howe-Moore

Définition 3.2.1 Soit G un g.l.c.et $(\pi, \mathscr{H})$ une représentation unitaire de G; nous dirons que π est C_0, si ses coefficients matriciels

$$\mathrm{C}^{\pi}_{\xi,\eta} : \mathrm{G} \to \mathbf{C},\ g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta\rangle \qquad \text{pour tout} \quad \xi, \eta \in \mathscr{H}$$

sont tous dans $\mathrm{C}_0(\mathrm{G})$.

Théorème 3.2.2 ***(Théorème du mélange de Howe-Moore)*** *Soit* G *un groupe de Lie simple et non-compact. Soit* $(\pi, \mathscr{H})$ *une représentation unitaire de* G *telle que* $\mathscr{H}^{\mathrm{G}} = \{0\}$. *Alors* π *est* C_0.

Voici un corollaire immédiat de ce théorème.

Corollaire 3.2.3 ***(Critère d'ergodicité de Moore)*** *Soit* G *un groupe de Lie simple et non-compact et* H *un sous-groupe de* G *d'adhérence non compacte.*
(i) Soit $\mathrm{G} \curvearrowright (\mathrm{X}, m)$ *une action ergodique p.m.p. Alors l'action* $\mathrm{H} \curvearrowright (\mathrm{X}, m)$ *est ergodique (et même mélangeante si* H *est fermé).*
(ii) En particulier, soit Γ *un réseau dans* G. *Alors l'action* $\mathrm{H} \curvearrowright (\mathrm{G}/\Gamma, m_{\mathrm{G}/\Gamma})$ *est ergodique (et même mélangeante si* H *est fermé).*

Démonstration …■

Exemple 3.2.4 (Ergodicité des flots géodésique et horocycliques) Soit Σ une surface compacte orientée de genre ≥ 2 et $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$, le groupe fondamental de Σ, vu comme réseau dans $\mathrm{G} = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. Le corollaire plus haut donne une nouvelle démonstration (après celle vue au 1e semestre) du théorème de Hedlund et Hopf sur l'ergodicité du flot géodésique et du flot horocyclique de Σ.

En effet, le flot géodésique et le flot horocyclique sont donnés, respectivement, par l'action par translations des sous-groupes fermés

$$\mathrm{H}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbf{R}^* \right\}$$

et

$$\mathrm{H}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; : \; t \in \mathbf{R} \right\}$$

sur l'espace homogène G/Γ. Comme H_1 et H_2 ne sont pas compacts, ces flots sont ergodiques (et même mélangeants).

3.3 Preuve du théorème de Howe-Moore

Lemmes préliminaires

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. On considérera les sous-groupes suivants de G :

$$\mathrm{K} = \left\{ g \in \mathrm{G} \; : \; g^t g = \mathrm{I} \right\},$$

le groupe orthogonal (qui est un groupe compact), et

$$\mathrm{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \; : \; a_i > 0 \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

ainsi que l'ensemble

$$\mathrm{A}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \; : \; a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0 \right\}$$

Lemme 3.3.1 ***(Décomposition de Cartan)*** *On a*

$$\mathrm{G} = \mathrm{K}\mathrm{A}^+\mathrm{K};$$

de manière plus précise : pour tout $g \in \mathrm{G}$, il existe un unique $a \in \mathrm{A}^+$ ainsi que $k_1, k_2 \in \mathrm{K}$ tels que $g = k_1 a k_2$.

Démonstration …■

Lemme 3.3.2 *Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G. Supposons que π est C_0 sur A^+. Alors π est C_0 sur G.*

Démonstration …■

Lemme 3.3.3 ***(Lemme de Mautner)*** *Soit* G *un g.l.c. et* $(\pi, \mathcal{H})$ *une représentation unitaire de* G*. Soit* $x \in G$*. On suppose qu'il existe une suite* $(y_n)_n$ *dans* G *telle que* $\lim_n y_n^{-1} x y_n = e$*.*

Soit $\xi \in \mathcal{H}$ *et soit* $\xi_\infty \in \mathcal{H}$ *une valeur d'adhérence de* $(\pi(y_n)\xi)_n$ *pour la topologie faible. Alors* ξ_∞ *est invariant par* $\pi(x)$*. En particulier, si* $\xi \in \mathcal{H}$ *est invariant par les* $\pi(y_n)$*, alors* ξ *est invariant par* $\pi(x)$*.*

Démonstration …■

On introduit les sous-groupes fermés suivants de $G = SL_n(\mathbf{R})$, pour chaque $j = 1, \ldots, n-1$:

$$N_j = \left\{ \begin{pmatrix} I_j & X \\ 0 & I_{n-j} \end{pmatrix} \,:\, X \in M_{j,n-j}(\mathbf{R}) \right\};$$

ainsi, pour $G = SL_2(\mathbf{R})$,

$$N = N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, x \in \mathbf{R} \right\}.$$

Lemme 3.3.4 *Le groupe* $G = SL_n(\mathbf{R})$ *est engendré par*

$$\bigcup_{j=1,\ldots,n-1} N_j \cup \bigcup_{j=1,\ldots,n-1} N_j^t;$$

en particulier, $SL_2(\mathbf{R})$ *est engendré par* $N \cup N^t$*.*

Lemme 3.3.5 *Soit* $G = SL_n(\mathbf{R})$ *et une suite* $(a_i)_i$ *dans* A^+ *avec* $a_i = \mathrm{d}iag(a_1^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$*. On suppose que* $\lim_i a^{(i)} = \infty$ *dans* A^+*. Alors*

1. *il existe* $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ *tel que*
$$\frac{a_j^{(i)}}{a_{j+1}^{(i)}} \to \infty;$$
2. *on a*
$$\lim_i a_i^{-1} x a_i = I_n \qquad \textit{pour tout} \quad x \in N_j$$
et
$$\lim_i a_i x a_i^{-1} = I_n \qquad \textit{pour tout} \quad x \in N_j^t.$$

Démonstration ...■

Lemme 3.3.6 *Soit* $(\pi, \mathcal{H})$ *une représentation unitaire de* $G = SL_2(\mathbf{R})$. *Alors*

$$\mathcal{H}^N = \mathcal{H}^G,$$

c-à-d : tout vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ *qui est invariant sous* N *est invariant sous tout* G.

Démonstration ...■

Preuve du théorème de Howe-Moore : cas $G = SL_2(\mathbf{R})$

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de $G = SL_2(\mathbf{R})$ possèdant un coefficient matriciel

$$C_{\xi,\eta} : g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta\rangle$$

qui n'est pas dans $C_0(G)$ Nous voulons montrer que $\mathcal{H}^G \neq \{0\}$, c-à-d que π possède des vecteurs invariants non nuls.

Par le Lemme 3.3.2, on peut supposer que $C_{\xi,\eta}|_{A^+}$ n'est pas dans $C_0(A^+)$. Il existe donc une suite $(a_i)_i$ dans A^+ avec $\lim_i a_i = \infty$ telle que

$$\lim_i \langle \pi(a_i)\xi, \eta\rangle \neq 0.$$

Comme $(\pi(a_i)\xi)_i$ est une suite bornée dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, elle possède une sous-suite extraite faiblement convergente dans $\mathcal{H}$; quitte à remplacer $(\pi(a_i)\xi)_i$ par cette sous-suite, nous pouvons supposer que la limite faible

$$\xi_\infty := \lim_i \pi(a_i)\xi$$

existe dans $\mathcal{H}$.

On observera que, comme

$$\langle \xi_\infty, \eta\rangle = \lim_i \langle \pi(a_i)\xi, \eta\rangle \neq 0,$$

on a $\xi_\infty \neq 0$.

Par le lemme de Mautner et le Lemme 3.3.5, ξ_∞ est invariant par N. Par le Lemme 3.3.6, ξ_∞ est invariant par G. Ceci complète la preuve dans le cas $n = 2$.

Preuve du théorème de Howe-Moore : cas $G = SL_n(\mathbf{R})$

On suit tout d'abord la stratégie de la preuve du résultat dans le cas $n = 2$, résultat qu'on utilisera alors pour conclure. Soit $(\pi, \mathscr{H})$ une représentation unitaire de $G = SL_n(\mathbf{R})$ possèdant un coefficient matriciel

$$C_{\xi,\eta} : g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta\rangle$$

qui n'est pas dans $C_0(G)$; il s'agit de montrer que $\mathscr{H}^G \neq \{0\}$.

Par le Lemme 3.3.2, il existe une suite $(a_i)_i$ dans A^+ avec $\lim_i a_i = \infty$ telle que

$$\lim_i \langle \pi(a_i)\xi, \eta\rangle \neq 0.$$

et on peut supposer que la limite faible

$$\xi_\infty := \lim_i \pi(a_i)\xi$$

existe dans $\mathscr{H}$. L'hypothèse garantit que $\xi_\infty \neq 0$.

Par le Lemme 3.3.5, il existe $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que

$$\lim_i {a_i}^{-1} x a_i = I_n \qquad \text{pour tout} \quad x \in N_j.$$

Alors, ξ_∞ est invariant sous N_j, par le Lemme de Mautner,

Pour chaque couple (i, l) avec $1 \leq i \leq j$ et $j + 1 \leq l \leq n$, soit $H_{i,l}$ la copie de $SL_2(\mathbf{R})$ formée des matrices $A \in SL_n(\mathbf{R})$ avec $Ae_k = e_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, l\}$. Alors N_j contient le sous-groupe $N_{i,l}$ formé des matrices unipotentes supérieures de $H_{i,l}$. Par le Lemme 3.3.6, il s'ensuit que ξ_∞ est invariant sous $H_{i,l}$ pour tout $1 \leq i \leq j$ et $j + 1 \leq l \leq n$. Comme $\bigcup_{1 \leq i \leq j, j+1 \leq l \leq n} H_{i,l}$ engendre $SL_n(\mathbf{R})$, le vecteur ξ_∞ est invariant $SL_n(\mathbf{R})$.■

Une première application du théorème de Howe-Moore : un théorème ergodique en moyenne

Soit G un groupe localement compact, $G \curvearrowright (X, m)$ une action pmp et $(B_n)_n$ une suite de boréliens de G avec

$$0 < m_G(B_n) < \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_n m_G(B_n) = +\infty.$$

Soit $\mu_n = \dfrac{1}{m_G(B_n)}\mathbf{1}_{B_n} \in L^1(G)$. Pour $f \in L^2(X,m)$, on considère les moyennes $\pi_X(\mu_n)f \in L^2(X)$, définies par

$$\pi_X(\mu_n)f(x) = \frac{1}{m_G(B_n)}\int_{B_n} f(g^{-1}x)\,dm_G(g) \qquad \text{pour tout} \quad x \in X,$$

La question générale est :

Question : A-t-on

$$\lim_n \pi_X(\mu_n)f = \int_X f(x)\,dm(x),$$

en moyenne L^2 (Théorème ergodique L^2) ou même ponctuellement (Théorème ergodique ponctuel) ?

Une conséquence facile du Théorème de Howe-Moore est qu'effectivement un tel théorème ergodique L^2 est vrai pour les actions de groupes de Lie simples.

Théorème 3.3.7 ***(Théorème ergodique*** L^2 ***pour les groupes de Lie simples)*** *Soit* G *un groupe de Lie simple non compact et* $(B_n)_n$ *une suite de boréliens de* G *comme plus haut. Alors, pour toute action pmp ergodique* $G \curvearrowright (X,m)$, *on a*

$$\lim_n \|\pi_X(\mu_n)f - \int_X f(x)\,dm(x)\|_2 = 0 \qquad \textit{pour tout} \quad f \in L^2(X),$$

avec $\mu_n = \dfrac{1}{m_G(B_n)}\mathbf{1}_{B_n} \in L^1(G)$.

Démonstration …■

Chapitre 4

Comptage de points d'un réseau : Théorème de Duke-Rudnick-Sarnak

Nous allons démontrer un résultat de Duke-Rudnick-Sarnak [DuRS93] sur l'asympotique du nombre de points d'un réseau, avec une méthode élémentaire due à Eskin et McMullen [EsMM93] basée sur le Théorème de Howe-Moore du chapitre précédent.

4.1 Le Théorème de Duke-Rudnick-Sarnak : énoncé

Soit $n \geq 2$. On considère la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^n$ et la norme associée sur $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$:

$$\|g\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|gv\| \qquad \text{pour tout} \quad g \in \mathrm{G}.$$

On remarquera que cette norme est invariante par rotations :

$$\|kg\| = \|gk\| = \|g\| \qquad \text{pour tout} \quad g \in \mathrm{G}, k \in \mathrm{K},$$

où $\mathrm{K} = \mathrm{SO}(n)$ est le groupe orthogonal.

Pour $r > 0$, on note

$$\mathrm{B}_r = \{g \in \mathrm{G} \,:\, \|g\| \leq r\},$$

la boule de rayon r dans G.

Soit Γ un réseau dans G (comme, par exemple, $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$). On s'intéresse au comportement asymptotique du nombre

$$\mathrm{N}_r = \mathrm{Card}(\Gamma \cap \mathrm{B}_r) = \mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma \,:\, \|\gamma\| \leq r\}$$

quand $r \to +\infty$. On *normalise* la mesure de Haar m_G sur G de telle sorte que la mesure de Haar m_X induite sur $X = G/\Gamma$ soit une mesure de probabilité. Soit $v_r = m_G(B_r)$ la mesure de B_r.

Théorème 4.1.1 ***(Théorème de Duke, Rudnick et Sarnak (1993))*** *On a*

$$N_r \sim v_r \qquad \textit{quand} \qquad r \to \infty.$$

4.2 Un théorème d'équidistribution de sphères

Soit Γ un réseau dans $G = SL_n(\mathbf{R})$ et $X = G/\Gamma$, muni de sa mesure de Haar normalisée m_X. Soit $x_0 = \Gamma \in X$ le point base et $Y = Kx_0 \subset X$, l'orbite de x_0 sous $K = SO(n)$. Soit m_Y la mesure de probabilité sur Y qui est l'image de la mesure de Haar normalisée m_K de K par l'application $k \mapsto kx_0$:

$$\int_X \varphi\, dm_Y = \int_K \varphi(kx_0)\, dm_K(k) \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in C_c(X).$$

Pour la preuve du prochain résultat, nous aurons besoin d'une deuxième décomposition de G, la décomposition d'Iwasawa. Soit

$$N = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures et A le sous-groupe des matrices diagonales $diag(a_1, \dots, a_n)$ dans G avec $a_i > 0$ pour tout i ; alors

$$R = AN$$

est le sous-groupe (résoluble) des matrices triangulaires supérieures avec éléments diagonaux > 0.

Proposition 4.2.1 ***(Décomposition d'Iwasawa)*** *On a*

$$G = KAN;$$

de manière plus précise, l'application

$$K \times A \times N \to G, \ (k, a, n) \mapsto kan$$

est un homéomorphisme. De plus, l'image de $m_R \otimes m_K$ par cette application est une mesure de Haar sur G, *où m_R est une mesure de Haar à gauche sur* $R = AN$ *et m_K la mesure de Haar normalisée sur* K.

Théorème 4.2.2 ***(Equidistribution de sphères)*** *Pour* $g \in \mathrm{G}$, *on a*

$$\lim_{g\to\infty} g_*(m_{\mathrm{Y}}) = m_{\mathrm{X}},$$

c-à-d

$$\lim_{g\to\infty}\int_{\mathrm{Y}} \varphi(gy)\,dm_{\mathrm{Y}}(y) = \int_{\mathrm{X}} \varphi(x)\,dm_{\mathrm{X}}(x) \qquad \textit{pour tout} \quad \varphi \in \mathrm{C}_c(\mathrm{X}).$$

Démonstration …■

4.3 Un résultat de comptage en moyenne

Soit Γ un réseau dans $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{X} = \mathrm{G}/\Gamma$, muni de sa mesure de Haar normalisée m_{X}. Pour $r > 0$, soit B_r la boule de rayon r dans G. Avant d'estimer $\mathrm{N}_r = \mathrm{Card}(\Gamma \cap \mathrm{B}_r)$, nous allons d'abord montrer que les moyennes sur X de la fonction

$$\mathrm{N}_r : \mathrm{X} \to \mathbf{N},\ \mathrm{N}_r(x) = \mathrm{Card}(g\Gamma \cap \mathrm{B}_r) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_r}(g\gamma) \qquad \text{pour tout} \quad x = g\Gamma \in \mathrm{X}$$

sont équivalentes à v_r quand $r \to +\infty$.

Proposition 4.3.1 *Pour tout* $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathrm{X})$ *avec* $\int_{\mathrm{X}} \varphi(x)\,dm_{\mathrm{X}}(x) = 1$, *on a*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{v_r}\int_{\mathrm{X}} \mathrm{N}_r(x)\varphi(x)\,dm_{\mathrm{X}}(x) = 1.$$

Démonstration …■

4.4 Le Théorème de Duke-Rudnick-Sarnak : démonstration

Soit Γ un réseau dans $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{X} = \mathrm{G}/\Gamma$, muni de sa mesure de Haar normalisée m_{X}. Pour $r > 0$, soit $\mathrm{N}_r = \mathrm{Card}(\Gamma \cap \mathrm{B}_r)$.

On admetta le lemme suivant.

Lemme 4.4.1 *Il existe une constante* $\mathrm{C} > 0$ *telle que*

$$v_r = \mathrm{C} r^{n^2-n} \qquad \textit{pour tout} \quad r > 0.$$

Démonstration du Théorème de Duke-Rudnick-Sarnak : $\mathrm{N}_r \sim v_r$ quand $r \to \infty$. …■

4.5 Exercices

Exercice 4.5.1 (Expression de la mesure de Haar de $SL_2(\mathbf{R})$ dans les décompositions de Cartan et d'Iwasawa) Soit $G = SL_2(\mathbf{R}.)$ Pour $g \in G$, on considère les décompositions de Cartan et d'Iwasawa :

$$g = k(\theta 1)a(s)k(\theta_2) \in KA^+K; \, g = k(\theta)a(s)n(x) \in KAN,$$

où $k(\theta)$ est la rotation d'angle $2\pi\theta$ avec $\theta \in [0;1[$, $a(s)\,\mathrm{diag}(s, s^{-1})$ avec respectivement $s > 1$ et $s > 0$ et $n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbf{R}$.

(i) Montrer que la formule

$$f \mapsto \int_0^1 \int_1^{+\infty} \int_0^1 f(k(\theta 1)a(s)k(\theta_2))(s^2 - s^{-2})d\theta_1 \frac{ds}{s} d\theta_2 \qquad \text{pour tout} \quad f \in C_c(G)$$

définit une mesure de Haar m_G sur G.

(ii) Montrer que la formule

$$f \mapsto \int_0^1 \int_0^{+\infty} \int_0^1 f(k(\theta)a(s)n(x))(s^2 - s^{-2})d\theta s ds dx \qquad \text{pour tout} \quad f \in C_c(G)$$

définit une mesure de Haar m_G sur G.

Exercice 4.5.2 (Volume de boules dans $SL_2(\mathbf{R})$) On considère la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^2$ et la norme associée sur $G = SL_2(\mathbf{R})$. Pour $r > 0$, soit $B_r = \{g \in G \,:\, \|g\| \leq r\}$ la boule de rayon r dans G et $v_r = m_G(B_r)$ son volume. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $v_r = Cr^2$ pour tout $r > 0$.

[*Indication :* utiliser la formule de l'Exercice **??** donnant l'expression de la mesure de Haar m_G dans la décomposition de Cartan.]

Chapitre 5

Trou spectral pour les actions et les représentations de groupes

5.1 Actions mesurables avec trou spectral

Soit G un groupe localement compact et $G \curvearrowright (X, \mathscr{B}, m)$ une action sur un espace mesuré, m étant G-quasi-invariante (mais non nécessairement invariante ni finie). Rappellons que, si m est une mesure de probabilité G-invariante, $L^2_0(X)$ désigne le sous-espace

$$L^2_0(X) := \{f \in L^2(X, m) \ : \ \int_X f\,dm = 0\}.$$

Quand m n'est pas une mesure de probabilité G-invariante, on pose

$$L^2_0(X) := L^2(X, m).$$

Soit $(\pi_X, L^2_0(X))$ la représentation de Koopman associée à l'action $G \curvearrowright X$ (voir Définition 2.3.2).

Définition 5.1.1 (Actions avec trou spectral) On dit que l'action $G \curvearrowright (X, m)$ possède la propriété de *trou spectral*, en abrégé la propriété (TS), s'il existe un couple (Q, ε) formé d'une partie compacte Q de G et d'un nombre réel $\varepsilon >$ tels que

$$\sup_{g \in Q} \|\pi_X(g)f - f\| \geq \varepsilon \|f\| \qquad \text{pour tout} \quad f \in L^2_0(X).$$

Remarque 5.1.2 Supposons que $G \curvearrowright (X, m)$ soit pmp ; l'ergodicité de cette action équivaut à :

$$\sup_{g\in Q} \|\pi_X(g)f - f\| > 0 \qquad \text{pour tout} \quad f \in L^2_0(X)$$

pour toute partie génératrice Q de G. Nous voyons donc que la propriété (TS) est une variante forte de l'ergodicité : il y une borne uniforme $\varepsilon > 0$ pour

$$\sup_{g\in Q} \|\pi_X(g)f - f\| \qquad \text{pour tout} \quad f \in L^2_0(X), \|f\| \le 1.$$

Exemple 5.1.3 (i) Soit $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Z} \curvearrowright \mathbf{S}^1$ l'action associée de $G = \mathbf{Z}$ par rotations irrationnelles. Alors $\mathbf{Z} \curvearrowright \mathbf{S}^1$ n'a *pas* la propriété (TS). En effet, soit $f_n : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C}$ définie par $f_n(x) = e^{2\pi i n x}$. Alors, $f_n \in L^2_0(\mathbf{S}^1)$, $\|f_n\| = 1$ et on a

$$\pi_{\mathbf{S}^1}(1) f_n = e^{2\pi i \alpha n} f_n \qquad \text{pour tout} \quad n \ge 1.$$

Comme il existe une sous-suite $(n_k)_k$ telle que $\lim_k e^{2\pi i \alpha n_k} = 1$, on a

$$\lim_k \|\pi_{\mathbf{S}^1}(1) f_{n_k} - f_{n_k}\| = 0.$$

Comme $\{1\}$ engendre $\mathbf{Z}$, ceci montre que

$$\lim_k \|\pi_{\mathbf{S}^1}(m) f_{n_k} - f_{n_k}\| = 0 \qquad \text{pour tout} \quad m \in \mathbf{Z}.$$

En fait, nous verrons que l'absence de la propriété (TS) est un phénomène général pour les groupes moyennables discrets.
(ii) Soit Γ un groupe non moyennable ; nous verrons plus tard que l'action de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright \{0,1\}^\Gamma$ (voir Exemple 2.3.12) possède la propriété (TS).

5.2 Représentations unitaires avec trou spectral

Soit G un groupe localement compact et $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G.

Définition 5.2.1 (Représentations unitaires avec trou spectral) On dit que la représentation $(\pi, \mathcal{H})$ possède la propriété de *trou spectral*, en abrégé la propriété (TS), s'il existe un couple (Q, ε) formé d'une partie compacte Q de G et d'un nombre réel $\varepsilon >$ tels que

$$\sup_{g\in Q} \|\pi(g)\xi - \xi\| \ge \varepsilon \|\xi\| \qquad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Remarque 5.2.2 (i) Une action mesurable $G \curvearrowright (X, m)$ possède la propriété (TS) si et seulement si la représentation de Koopmann $(\pi_X, L^2_0(X))$ possède la propriété (TS).
(ii) **(Négation de la propriété (TS))** Il est instructif d'écrire ce que signifie l'absence de (TS) pour une représentation unitaire : la représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ ne possède pas la propriété (TS) si et seulement si, pour tout couple (Q, ε) formé d'une partie compacte Q de G et d'un nombre réel $\varepsilon >$ il existe $\xi \in \mathcal{H}$ avec $\|\xi\| = 1$ et tel que

$$\sup_{g\in Q} \|\pi(g)\xi - \xi\| \leq \varepsilon.$$

(iii) **(Topologie de Fell et propriété (TS))** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $\mathrm{Rep}(G, \mathcal{H})$ l'ensemble des représentations unitaires de G dans $\mathcal{H}$. Il existe une topologie naturelle sur $\mathrm{Rep}(G, \mathcal{H})$, appelée *topologie de Fell.* On peut formuler absence de (TS) en termes de cette topologie : la représentation unitaire π dans $\mathcal{H}$ ne possède pas la propriété (TS) si et seulement si la représentation triviale 1_G est dans l'adhérence du singleton $\{\pi\}$.

Voici un critère simple pour établir l'absence de la propriété (TS).

Lemme 5.2.3 *Soit* $(\pi, \mathcal{H})$ *une représentation unitaire de* G. *Supposons qu'il existe une suite* $(\xi_n)_n$ *de vecteurs dans* $\mathcal{H}$ *avec* $\|\xi_n\| = 1$ *et*

$$\lim_n \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| = 0 \qquad \textit{pour tout} \quad g \in G.$$

Alors $(\pi, \mathcal{H})$ *n'a pas la propriété (TS).*

Démonstration ...■

5.3 Moyennes invariantes et propriété (TS)

Moyennes sur des espaces mesurés

Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace mesuré σ-fini.

Définition 5.3.1 **(Moyenne)** Une *moyenne* sur (X, m) est une forme linéaire

$$M : L^\infty(X, m) \to \mathbf{C}$$

qui est

1. positive : $M(\varphi) \geq 0$ pour tout $\varphi \geq 0$;
2. normalisée : $M(\mathbf{1}_X) = 1$.

On note $\mathrm{Moy}(X, m)$ l'ensemble des moyennes sur (X, m).

Exemple 5.3.2 L'ensemble

$$\mathrm{Dens}(X, m) = \{f \in L^1(X, m) \ : \ f \geq 0, \int_X f dm = 1\}$$

des densités sur (X, m) se plonge dans $\mathrm{Moy}(X, m)$ par

$$\varphi \mapsto \int_X f\varphi dm \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in L^\infty(X, m).$$

Plus généralement, soit μ une mesure de probabilité sur X qui est absolument continue par rapport à m, c-à-d, telle que pour tout $A \in \mathscr{B}$ avec $m(A) = 0$, on ait $\mu(A) = 0$; alors μ définit une moyenne sur (X, m) par intégration par rapport à μ :

$$\varphi \mapsto \int_X \varphi d\mu \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in L^\infty(X, m).$$

Remarque 5.3.3 (i) Une moyenne M sur (X, m) définit une mesure de probabilité *finiment additive* (mais non nécessairement σ-additive) μ_M sur X par

$$\mu_M(A) = M(\mathbf{1}_A) \qquad \text{pour tout} \quad A \in \mathscr{B}.$$

De plus, μ_M est absolument continue par rapport à m.
(ii) Réciproquement, on peut montrer que toute mesure de probabilité finiment additive μ sur $\mathscr{B}$ et qui est absolument continue par rapport à m définit une moyenne M_μ sur (X, m) telle que

$$M(\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) \qquad \text{pour tout} \quad A_i \in \mathscr{B}, c_i \in \mathbf{C}.$$

(iii) **(Image d'une moyenne par une application mesurable)** Soit $(X', \mathscr{B}', m')$ un *facteur* de $(X, \mathscr{B}, m)$, c-à-d $(X', \mathscr{B}', m')$ est un espace mesuré et il existe une application mesurable $\theta : X \to X'$ telle que $\theta_*(m) = m'$. Alors

$$\Phi : L^\infty(X', m') \to L^\infty(X, m), \ \varphi \mapsto \varphi \circ \theta$$

est une application linéaire, qui est bien définie, qui préserve la positivité et telle que $\Phi(\mathbf{1}_{X'}) = \mathbf{1}_X$. Cette application induit donc une application

$$\theta_* : \mathrm{Moy}(X, m) \to \mathrm{Moy}(X', m'), \ M \mapsto \theta_*(M) := M \circ \Phi.$$

On appelle $\theta_*(M)$ l'image de M sous θ.

Soit X un espace localement compact. On notera $\mathrm{Prob}(X)$ l'ensemble des mesures (σ-finies) de probabilité sur la tribu $\mathscr{B}(X)$ des boréliens de X.

Quand X est un espace *compact*, il est bien connu que $\mathrm{Prob}(X)$ est compact pour la topologie faible $\sigma(C(X)', C(X))$. Ceci n'est plus vrai quand X n'est pas compact, comme le cas de $X = \mathbf{R}$ le démontre.

L'utilité des moyennes provient du lemme suivant qui montre la compacité $\mathrm{Moy}(X, m)$ pour une topologie faible.

Lemme 5.3.4 *Soit* $(X, \mathscr{B}, m)$ *un espace mesuré* σ*-fini.*
(i) L'ensemble $\mathrm{Moy}(X, m)$ *est une partie convexe et compacte de la boule unité du dual topologique* $L^\infty(X)'$ *de* $L^\infty(X)$ *pour la topologie faible* $\sigma(L^\infty(X)', L^\infty(X))$.
(ii) L'espace $\mathrm{Dens}(X, m)$ *des densités sur* (X, m)*, vu comme partie de* $\mathrm{Moy}(X, m)$*, est dense dans* $\mathrm{Moy}(X, m)$*, pour la topologie faible* $\sigma(L^\infty(X)', L^\infty(X))$.

Démonstration ...■

Dans le cas où X est compact, chaque moyenne sur X définit une mesure de probabilité.

Lemme 5.3.5 *Soit* X *un espace topologique compact, muni d'une mesure de probabilité m sur sa tribu borélienne. Soit* $M \in \mathrm{Moy}(X, m)$. *Alors,* M *définit une mesure de probabilité* $\mu_M \in \mathrm{Prob}(X)$ *donnée par*

$$\int_X f(x) d\mu_M(x) = M([f]), \qquad \textit{pour tout} \quad f \in C(X),$$

où $[f]$ *est la classe de* f *dans* $L^\infty(X, m)$.

Démonstration En effet, l'application

$$\varphi : C(X) \to \mathbf{C}, \quad f \mapsto M([f])$$

est une forme linéaire positive sur $C(X)$ avec $\varphi(\mathbf{1}_X) = 1$. Par le théorème de Riesz, il existe donc une mesure de probabilité μ_M sur la tribu borélienne de X telle que $\varphi(f) = \int_X f(x) d\mu_M(x)$ pour tout $f \in C(X)$.■

Moyennes invariantes sur des espaces mesurés

Soit maintenant $G \curvearrowright X$ une action mesurable sur l'espace mesuré $(X, \mathscr{B}, m)$, avec une mesure σ-finie et G-quasi-invariante m. Alors G agit par isométries sur $L^\infty(X, m)$ par $(g, \varphi) \mapsto {}_g\varphi$, avec

$${}_g\varphi(x) = \varphi(g^{-1}x) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G, \varphi \in L^\infty(X, m), x \in X.$$

Par conséquent, G agit dualement sur l'espace $\mathrm{Moy}(X, m)$ des moyennes :

$$gM(\varphi) = M({}_{g^{-1}}\varphi) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G, M \in \mathrm{Moy}(X, m), \varphi \in L^{\infty}(X, m).$$

Définition 5.3.6 Une moyenne $M \in \mathrm{Moy}(X, m)$ est G-invariante si $gM = M$ pour tout $g \in G$. On notera $\mathrm{Moy}(X, m)^G$ le sous-espace compact et convexe (mais éventuellement vide !) des moyennes G-invariantes sur (X, m).

Nous aurons besoin de considérer l'action de G par isométries sur $L^1(X, m)$ donnée par

$$\pi_X(g)f(x) = c(g^{-1}, x)f(g^{-1}x) \qquad \text{pour tout} \quad f \in L^1(X, m), g \in G, x \in X,$$

où $c(g, x) = \dfrac{dgm(x)}{dm(x)}$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure image gm par rapport à m.

La proposition suivante est un résultat crucial établissant un lien entre la propriété (TS) et l'existence de moyennes invariantes. Ce résultat est non trivial seulement dans le cas où m n'est pas une mesure de probabilité invariante.

Proposition 5.3.7 ***(Propriété (TS) et moyennes invariantes)*** *Soit* $G \curvearrowright (X, m)$ *une action mesurable. Supposons que la représentation* $(\pi_X, L^2(X, m))$ *n'a pas la propriété (TS). Alors*

$$\mathrm{Moy}(X, m)^G \neq \emptyset.$$

Démonstration Comme $(\pi_X, L^2(X, m))$ n'a pas la propriété (TS), il existe une suite (ξ_n) dans $L^2(X, m)$ avec $\|\xi_n\| = 1$ tell que $\lim_n \|\pi_X(g)\xi_n - \xi_n\|_2 = 0$ pour tout $g \in\in G$.

On pose $f_n := |\xi_n|^2$. Alors $f_n \in \mathrm{Dens}(X, m)$ et, pour tout $g \in G$, on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\|\pi_X(g)f_n - f_n\|_1 &= \int_X |c(g^{-1}, x)f_n(g^{-1}x) - f_n(x)|dm(x) \\
&= \int_X ||c(g^{-1}, x)^{1/2}\xi_n(g^{-1}x)|^2 - |\xi_n(x)|^2|dm(x) \\
&= \int_X (|c(g^{-1}, x)^{1/2}\xi_n(g^{-1}x)| + |\xi_n(x)|) \left||c(g^{-1}, x)^{1/2}\xi_n(g^{-1}x)| - |\xi_n(x)|\right| dm(x) \\
&\leq \left(\int_X (|c(g^{-1}, x)^{1/2}\xi_n(g^{-1}x)| + |\xi_n(x)|)^2 dm(x)\right)^{1/2} \times \\
&\times \left(\int_X ||c(g^{-1}, x)^{1/2}\xi_n(g^{-1}x)| - |\xi_n(x)||^2 dm(x)\right)^{1/2} \\
&\leq 2\|\xi_n\|_2 \|\pi_X(g)\xi_n - \xi_n\|_2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\lim_n \|\pi_X(g)f_n - f_n\|_1 = 0 \qquad \text{pour tout} \quad g \in G.$$

Soit $M \in \mathrm{Moy}(X, m)$ dans l'adhérence de la suite $(f_n)_n$. Alors M est G-invariante ; en effet, soit $g \in G$ et $\varphi \in L^\infty(X, m)$ et $\varepsilon > 0$. Choisissons N tel que

$$\|\pi_X(g)f_N - f_N\|_1 \leq \varepsilon$$

et tel que

$$\left|M(\varphi) - \int_X f_N(x)\varphi(x)dm(x)\right| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \left|M({}_g\varphi) - \int_X f_N(x){}_g\varphi(x)dm(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned}
|M({}_g\varphi - \varphi)| &\leq \left|M({}_g\varphi) - \int_X f_N(x){}_g\varphi(x)dm(x)\right| + \left|\int_X f_N(x){}_g\varphi(x)dm(x) - \int_X f_N(x)\varphi(x)dm(x)\right| + \\
&\quad + \left|\int_X f_N(x)\varphi(x)dm(x) - M(\varphi)\right| \\
&\leq 2\varepsilon + \left|\int_X f_N(x)\varphi(g^{-1}x)dm(x) - \int_X f_N(x)\varphi(x)dm(x)\right| \\
&= 2\varepsilon + \left|\int_X (\pi_X(g^{-1})f_N(x) - f_N(x))\varphi(x)dm(x)\right| \\
&\leq 2\varepsilon + \|\pi_X(g)f_N - f_N\|_1\|\varphi\|_\infty \leq 2\varepsilon + \varepsilon\|\varphi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Remarque 5.3.8 Nous verrons plus tard (voir Theorème 7.1.6) que la réciproque est vraie également, du moins quand $L^2(X)$ est séparable : si $\mathrm{Moy}(X, m)^G \neq \emptyset$, alors $(\pi_X, L^2(X, m))$ n'a pas la propriété (TS).

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1 (Critère de non existence d'un trou spectral) Soient G un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts et $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G.

(i) On suppose qu'il existe une suite de vecteurs $(\xi_n)_n$ dans $\mathcal{H}$ avec $\|\xi_n\| = 1$ pour tout n et tels que, pour tout $g \in G$, on a :

$$\lim_n \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| = 0.$$

Montrer que π ne possède pas la propriété de trou spectral.

[*Indication :* Utiliser le lemme de Baire.]

(ii) On suppose maintenant que, pour toute partie finie F de G, il existe une suite de vecteurs $(\xi_n^F)_n$ dans $\mathscr{H}$ avec $\|\xi_n^F\| = 1$ pour tout n et tels que, pour tout $g \in F$, on a :

$$\lim_n \|\pi(g)\xi_n^F - \xi_n^F\| = 0.$$

La conclusion de (i) subsiste-t-elle ?

[*Indication :* On pourra considérer le groupe compact $G = \mathbf{S}^1$ et π un caractère unitaire convenable de G.]

Exercice 5.4.2 (Densité des densités dans les moyennes) Soit (X, m) un espace mesuré, $\mathrm{Moy}(X, m)$ l'ensemble des moyennes sur (X, m) et

$$L^1(X)_{1,+} = \{f \in L^1(X, m) \ : \ f \geq 0, \int_X f\,dm = 1\}$$

l'ensemble des densités sur (X, m), vu comme partie de $\mathrm{Moy}(X, m)$.

Montrer que le convexe $L^1(X)_{1,+}$ est dense dans $\mathrm{Moy}(X, m)$, pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(X)', L^\infty(X))$.

[*Indication :* Raisonner par l'absurde, en utilisant la version géométrique du Théorème de Hahn- Banach sur la séparation de convexes par des hyperplans dans les espaces vectoriels localement convexes (voir, par exemple, Rudin : Functional analysis).]

Chapitre 6

La propriété (T) de Kazhdan

Nous allons introduire une propriété de rigidité de certains groupes continus et discrets, ayant des applications remarquables.

6.1 Définition et première application de la propriété (T)

Soit G un groupe localement compact.

Définition 6.1.1 (Propriété (T) de Kazhdan) On dit que G possède la propriété (T) de Kazhdan si toute représentation unitaire $(\pi, \mathscr{H})$ de G avec $\mathscr{H}^G = \{0\}$ possède la propriété (TS).

Remarque 6.1.2 (i) Si G est *compact,* alors G possède la propriété (T). Ce sont les seuls groupes pour lesquels il est aisé d'établir la propriété (T). En effet, soit $(\pi, \mathscr{H})$ une représentation unitaire de G sans la propriété (TS) ; il existe alors une suite $(\xi_n)_n$ dans $\mathscr{H}$ avec $\|\xi_n\| = 1$ et $\lim_n \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| = 0$ uniformément sur G. En particulier, il existe N tel que

$$\sup_{g \in G} \|\pi(g)\xi_N - \xi_N\| \le \frac{1}{2}.$$

En dénotant par m_G la mesure de Haar normalisée sur G, soit

$$\eta := \int_G \pi(g)\xi_N \, dm_G(g) \in \mathscr{H},$$

c-à-d η est le vecteur dans $\mathcal{H}$ défini (au moyen du Théorème de Riesz) par la forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$ donnée par

$$\xi \mapsto \int_G \langle \xi, \pi(g)\xi_N \rangle dm_G(g).$$

Comme, par G-invariance de m_G,

$$\int_G \langle \pi(h^{-1})\xi, \pi(g)\xi_N \rangle dm_G(g) = \int_G \langle \xi, \pi(hg)\xi_N \rangle dm_G(g) = \int_G \langle \xi, \pi(g)\xi_N \rangle dm_G(g)$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a $\pi(h)\eta = \eta$ pour $h \in G$, c-à-d $\eta \in \mathcal{H}^G$. De plus, comme $\|\xi_N\| = 1$ et comme

$$\begin{aligned}\|\eta - \xi_N\| = \|\int_G (\pi(g)\xi_N - \xi_N) dm_G(g)\| &\leq \int_G \|\pi(g)\xi_N - \xi_N\| dm_G(g)\\ &\leq \frac{1}{2}\int_G dm_G = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

on a $\eta \neq 0$.
(ii) Observons que la la propriété (T) est héritée par les quotients : soit G un groupe localement compact possédant la propriété (T) et N un sous-groupe distingué fermé de G; alors G/N possède la propriété (T). En effet, soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de G/N qui ne possède pas la propriété (TS). Alors, en notant $p : G \to G/N$ l'epimorphisme canonique, $\pi \circ p$ est une représentation unitaire de G qui ne possède pas la propriété (TS). D'où $\mathcal{H}^G = \mathcal{H}^{G/N} \neq \{0\}$.
(iii) Le groupe discret $\Gamma = \mathbf{Z}$ ne possède pas la propriété (T). En effet, d'une part, la représentation régulière $(\pi_\Gamma, \ell^2(\Gamma))$ ne possède pas la propriété (TS) : avec

$$\xi_n = (2n+1)^{-1/2}\mathbf{1}_{\{-n,n\}} \in \ell^2(\Gamma),$$

on a $\|\xi_n\| = 1$ et, pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et $n \geq |k|$,

$$\|\pi_\Gamma(k)\xi_n - \xi_n\|^2 = \frac{\{-n+k, n+k\}\triangle\{-n,n\}}{2n+1} = \frac{2|k|}{2n+1}$$

et donc $\lim_n \|\pi_\Gamma(k)\xi_n - \xi_n\| = 0$. D'autre part, on a $\ell^2(\Gamma)^\Gamma = \{0\}$.

De manière similaire, on montre que $\mathbf{R}$ ne possède pas la propriété (T). Plus généralement, nous verrons (voir Corollaire 7.2.5) qu'un groupe moyennable et non compact ne possède pas la propriété (T).

Voici une des conséquences les plus spectaculaires de la propriété (T), qui a été une des motivations principales pour la considération de cette notion par Kazhdan.

Théorème 6.1.3 *Soit Γ un groupe dénombrable (discret) avec la propriété (T). Alors Γ est de type fini : il existe une partie* finie S *de Γ qui engendre Γ, c-à-d* $\Gamma = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} S^n \cup (S^{-1})^n$.

Démonstration Soit $(S_n)_n$ une suite croissante de parties finies S_n de Γ avec $\Gamma = \cup_n S_n$.

Pour tout n, on considère $H_n =< S_n >$ le sous-groupe engendré par S_n et la représentation unitaire naturelle de Γ dans $\mathscr{H}_n := \ell^(\Gamma/H_n)$. On observera que $\xi_n := \delta_{H_n} \in \mathscr{H}_n^{H_m}$ pour tout $m \leq n$ et que $\|\xi_n\| = 1$.

Soit $\pi := \oplus_n \pi_n$ la somme directe des représentations π_n : c'est la représentation unitaire de Γ sur $\mathscr{H} := \oplus_n \mathscr{H}_n$ (somme hilbertienne) donnée par

$$\pi(\gamma)(\eta_n)_n = (\pi_n(\gamma)\eta_n) \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma, (\eta_n)_n \in \oplus_n \mathscr{H}_n.$$

En notant de nouveau par ξ_n le vecteur $\xi_n \in \mathscr{H}_n$, vu comme vecteur dans $\mathscr{H}$, on a $\lim \|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| = 0$, pour tout $\gamma \in \Gamma$ (car $\gamma \in H_N$ pour un certain N et donc $\pi(\gamma)\xi_n = \xi_n$ pour tout $n \geq N$). Ceci veut dire que $(\pi, \mathscr{H})$ n'a pas la propriété (TS) et il existe donc $\eta = (\eta_n)_n \in \mathscr{H}^\Gamma$ avec $\eta \neq 0$. Il existe un n tel que $\eta_n \neq 0$ et, comme $\eta_n \in \ell^2(\Gamma/H_n)$ et $\eta_n \in \mathscr{H}_n^\Gamma$, il s'ensuit que Γ/H_n est fini. Ceci implique que Γ est engendré par l'ensemble fini $S := S_n \cup D$, où D est un système fini de représentants des classes à gauche modulo H_n dans Γ.■

6.2 Représentations unitaires de groupes abéliens

Nous aurons besoin tout d'abord de quelques préliminaires sur les mesures spectrales, habituellement associées à des opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert (voir l'ouvrage "Functional analysis" de W. Rudin).

Mesures spectrales

Soit X un ensemble muni d'une tribu $\mathscr{B}$; soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et notons

$$\mathrm{Proj}(\mathscr{H}) = \{P \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) \ : \ P^2 = P = P^*\}$$

l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathcal{H}$. Une *mesure spectrale* sur $(X, \mathcal{B}, \mathcal{H})$ est une application

$$\mathcal{B} \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H}), \quad B \mapsto P(B)$$

avec les propriétés suivantes

- $P(X) = I$ et $P(\emptyset) = 0$;
- pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, on a $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$
- pour toute suite $B_1, B_2, \ldots$ de parties dans $\mathcal{B}$ disjointes deux-à-deux, on a $P(\cup_{n\geq 1} B_n) = \sum_n P(B_n)$, pour la topologie forte des opérateurs (c-à-d $\lim_N \|P(\cup_{n\geq 1} B_n)\xi - \sum_{n=1}^N P(B_n)\xi\| = 0$, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$).

Étant donnée une mesure spectrale $B \mapsto P(B)$, tout vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ définit une mesure positive finie μ_ξ sur $\mathcal{B}$, de masse totale $\mu_\xi(X) = \|\xi\|^2$, par

$$\mu_\xi(B) = \langle P(B)\xi, \xi\rangle \qquad \text{pour tout} \quad B \in \mathcal{B}.$$

Soit $f : X \to \mathbf{C}$ une fonction mesurable et bornée ; alors on peut définir un opérateur, noté $\int_X f(x) dP(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, par la formule

$$\langle \left(\int_X f(x) dP(x) \right) \xi, \xi \rangle = \int_X f(x) d\mu_\xi(x) \qquad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Représentations unitaires de groupes abéliens localement compacts

Soit A un groupe abélien localement compact ; soit $\widehat{A}$ le groupe dual de A et $\mathcal{B}(\widehat{A})$ la tribu des boréliens de $\widehat{A}$.

Théorème 6.2.1 ***(Théorème "SNAG" de Stone, Naimark, Ambrose et Godement)*** *(i) Soit* $(\pi, \mathcal{H})$ *une représentation unitaire de* A. *Alors il existe une unique mesure spectrale sur* $P : \mathcal{B}(\widehat{A}) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ *telle que*

$$\pi(a) = \int_{\widehat{A}} \chi(a) dP(\chi) \qquad \textit{pour tout} \quad a \in A. \qquad (*)$$

(ii) Réciproquement, toute mesure spectrale $P : \mathcal{B}(\widehat{A}) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ *définit une représentation unitaire de* A *par la formule* $(*)$.

Démonstration Voir par exemple la monographie [Foll95].■

Étant donnée une représentation unitaire de A, il sera important d'exprimer l'existence de vecteurs A-invariants non nuls au moyen de la mesure spectrale associée.

Proposition 6.2.2 *Soit* $(\pi,\mathcal{H})$ *une représentation unitaire de* A *et* $P : \mathcal{B}(\widehat{A}) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ *la mesure spectrale associée. Alors* $\mathcal{H}^A = \mathrm{Im}P(\{1_A\})$.

Démonstration Soit $\xi \in \mathcal{H}$ avec $\|\xi\| = 1$. Par Cauchy-Schwarz, on a $\xi \in \mathcal{H}^A$ si et seulement si $\langle \pi(a)\xi, \xi\rangle = 1$ pour tout $a \in A$, c-à-d (par définition de la mesure spectrale) si et seulement si

$$\int_{\widehat{A}} \chi(a)\, d\mu_\xi(\chi) = 1 \qquad \text{pour tout} \quad a \in A.$$

Comme μ_ξ est une mesure de probabilité et comme 1 est un point extrémal du cercle unité, cette dernière égalité a lieu si et seulement si μ_ξ est la mesure de Dirac δ_{1_A} en 1_A. D'autre part, on a $\mu_\xi = \delta_{1_A}$ si et seulement si $\langle P(\{1_A\})\xi, \xi\rangle = 1$ et donc si et seulement si $\xi \in \mathrm{Im}P(\{1_A\}$.■

Remarque 6.2.3 (Effet d'un automorphisme sur une mesure spectrale) Soit $(\pi,\mathcal{H})$ une représentation unitaire de A et $P : \mathcal{B}(\widehat{A}) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ la mesure spectrale associée. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}(A)$ un automorphisme de A. Alors π^θ, définie par $\pi^\theta(a) = \pi(\theta(a))$ pour tout $a \in A$, est également une représentation unitaire de A sur le même espace de Hilbert $\mathcal{H}$. La mesure spectrale associée à π^θ est l'application

$$P^\theta : \mathcal{B}(\widehat{A}) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H}),\ B \mapsto P(\theta(B)),$$

pour l'action duale de θ sur $\widehat{A}$, donnée par

$$\theta\chi(a) = \chi(\theta^{-1}(a)) \qquad \text{pour tout} \quad \chi \in \widehat{A}, a \in A.$$

En effet, pour tout $a \in A$ et tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned}\langle \pi^\theta(a)\xi, \xi\rangle = \langle \pi^\theta(a)\xi, \xi\rangle &= \int_{\widehat{A}} \chi(\theta(a))\, d\mu_\xi(\chi)\\ &= \int_{\widehat{A}} \theta^{-1}\chi(a)\, d\mu_\xi(\chi)\\ &= \int_{\widehat{A}} \chi(a)\, d\theta_*^{-1}(\mu_\xi)(\chi)\end{aligned}$$

D'autre part, comme la mesure associée à P^θ et ξ est également $\theta_*^{-1}(\mu_\xi)$, ceci prouve l'assertion.

6.3 $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède la propriété (T) pour $n \geq 3$

Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.3.1 *Le groupe localement compact* $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ *possède la propriété (T) pour* $n \geq 3$.

Démonstration Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G. Supposons que π n'a pas la propriété (TS). Il faut montrer que $\mathcal{H}^G \neq \{0\}$.

On considère les sous-groupes suivants H et A de G :

$$H = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & I_{n-3} \end{pmatrix}.$$

On a

$$H \cong \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}), \qquad A \cong \mathbf{R}^2$$

et $HA \cong \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$ pour l'action standard de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^2$. On identifiera H à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, A à $\mathbf{R}^2$ et HA à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$.

Par le Théorème de Howe-Moore (Théorème 3.2.2), il suffit de montrer que $\mathcal{H}^A \neq \{0\}$.

On considère la restriction de π à $A = \mathbf{R}^2$. On identifie $\widehat{A}$ à $\mathbf{R}^2$ de la manière habituelle :

$$\mathbf{R}^2 \to \widehat{A}, x \mapsto (a \mapsto e^{ia.x}).$$

Soit $P : \mathcal{B}(\mathbf{R}^2) \mapsto \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ la mesure spectrale associée à la restriction $\sigma := \pi|_A$ de π à A; on a donc

$$\sigma(a) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{ia.x} dP(x) = 1 \qquad \text{pour tout} \quad a \in A = \mathbf{R}^2.$$

Soit $g \in H = \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ et σ^g la représentation unitaire de $\mathbf{R}^2$ conjuguée à σ par l'automorphisme $g \in \mathrm{Aut}(\mathbf{R}^2)$, c-à-d $\sigma^g(a) = \sigma(g(a))$. L'action duale $\chi \mapsto g\chi$ de g sur $\widehat{A}$, identifié comme plus haut à $\mathbf{R}^2$, correspond à l'action habituelle de la matrice $(g^{-1})t$ sur $\mathbf{R}^2$.

La mesure spectrale associée à σ^g est (voir Remarque 6.2.3)

$$P^g : \mathcal{B}(\mathbf{R}^2) \mapsto \mathrm{Proj}(\mathcal{H}), \ B \mapsto P((g^{-1})^t(B)).$$

D'autre part comme σ est la restriction à A de la représentation unitaire π de HA, on a

$$\sigma(gag^{-1}) = \pi(gag^{-1}) = \pi(g)\sigma(a)\pi(g^{-1}) \qquad \text{pour tout} \quad a \in \mathbf{R}^2.$$

Comme $gag^{-1} = g(a)$, on a $\sigma(g(a)) = \pi(g)\sigma(a)\pi(g^{-1})$ et donc

$$\pi(g)\mathrm{P}(\mathrm{B})\pi(g^{-1}) = \mathrm{P}((g^{-1})^t(\mathrm{B})) \qquad \text{pour tout} \quad \mathrm{B} \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^2), g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}). \qquad (*)$$

Supposons, par l'absurde, que $\mathscr{H}^{\mathrm{A}} = \{0\}$, c-à-d $\mathrm{P}(\{0\}) = 0$ par la Proposition 6.2.2.

La représentation π n'ayant pas(TS), il existe une suite $(\xi_n)_n$ avec $\|\xi_n\| = 1$ et

$$\lim_n \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| = 0 \qquad \text{pour tout} \quad g \in \mathrm{G}.$$

Pour tout n, soit $\mu_n := \mu_{\xi_n}$ la mesure de probabilité sur la tribu des boréliens de $\mathbf{R}^2$ associée à P et ξ_n. Comme $\mathrm{P}(\{0\}) = 0$, on a $\mu_n(\{0\}) = 0$ et μ_n peut être considérée comme mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.

Posons

$$m := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\mu_n \in \mathrm{Prob}(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}).$$

Alors $\mu_n \in \mathrm{Moy}(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, m)$. Par la relation $(*)$, on a, pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ et $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned}
|\mu_n((g^{-1})^t(\mathrm{B})) - \mu_n(\mathrm{B})| &= |\langle \pi(g)\mathrm{P}(\mathrm{B})\pi(g^{-1})\xi_n, \xi_n\rangle - \langle \mathrm{P}(\mathrm{B})\xi_n, \xi_n\rangle| \\
&= |\langle \mathrm{P}(\mathrm{B})\pi(g^{-1})\xi_n, \pi(g^{-1})\xi_n\rangle - \langle \mathrm{P}(\mathrm{B})\xi_n, \xi_n\rangle| \\
&\leq |\langle \mathrm{P}(\mathrm{B})\pi(g^{-1})\xi_n, \pi(g^{-1})\xi_n - \xi_n\rangle| + |\langle \mathrm{P}(\mathrm{B})(\pi(g^{-1})\xi_n - \xi_n), \xi_n\rangle| \\
&\leq 2\|\pi(g^{-1})\xi_n - \xi_n\|
\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_n |\mu_n((g^{-1})^t(\mathrm{B})) - \mu_n(\mathrm{B})| = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \mathrm{B} \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}), g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}). \qquad (**)$$

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Moy}(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ une valeur d'adhérence de la suite $(\mu_n)_n$. Alors M est une moyenne $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$-invariante, par $(**)$.

Soit $p : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{P}(\mathbf{R}^2)$ l'application canonique. Alors $p_*(\mathrm{M})$, l'image de M par p, est une moyenne sur $(\mathbf{P}(\mathbf{R}^2), m')$,où $m' = p_*(m)$ est l'image de m. Comme p est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$-équivariante, $p_*(\mathrm{M})$ est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$-invariante. Comme $\mathbf{P}(\mathbf{R}^2)$ est compact, $p_*(\mathrm{M})$ définit une mesure de probabilité $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$-invariante sur $\mathbf{P}(\mathbf{R}^2)$, par le Lemme 5.3.5. Une telle mesure n'existe pas (voir Exemple 2.1.8). ■

Remarque 6.3.2 (i) Nous verrons plus loin (voir Remarque 6.4.8) que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ ne possède *pas* la propriété (T).
(ii) La preuve donnée de la propriété (T) pour $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ plus haut peut s'étendre à d'autres groupes de Lie simples, comme par exemple $\mathrm{S}p_{2n}(\mathbf{R})$ pour $n \geq 2$.

6.4 Propriété (T) pour les réseaux de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}), n \geq 3$.

Nous venons de voir que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède la propriété (T) pour $n \geq 3$. Il est important d'établir cette propriété pour des groupes discrets, comme par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$. C'est le but de cette section dans laquelle nous verrons que la propriété (T) est héritée par les réseaux. La preuve de ce fait est basée sur la notion de représentation induite.

Représentations unitaires induites

Soit G un groupe localement compact (à base dénombrable d'ouverts, comme d'habitude) et soit Γ un sous-groupe discret de G. Il existe un domaine fondamental X pour G/Γ, c-à-d une partie borélienne $X \subset G$ telle que

– $G = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X\gamma$;

– $X\gamma_1 \cap X\gamma_2 = \emptyset$, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ avec $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

La donnée de X permet de définir deux applications mesurables

$$\alpha : G \times X \to \Gamma,\ (g, x) \mapsto \alpha(g, x) \qquad \text{et} \qquad G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g.x$$

données par

$$gx = (g.x)\alpha(g, x) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G, x \in X.$$

L'associativité de la loi de groupe sur G montre que l'application

$$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g.x$$

est une action de G sur X et que α vérifie la relation de *cocycle* suivante

$$\alpha(g_1 g_2, x) = \alpha(g_1, g_2 x)\alpha(g_2, x) \qquad \text{pour tout} \quad g_1, g_2 \in G, x \in X.$$

Soit m_X la restriction de la mesure de Haar m_G à X.

Lemme 6.4.1 *m_X est invariante par l'action de G sur X.*

Démonstration $\ldots\blacksquare$

Soit maintenant une représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de Γ. On pose

$$\widetilde{H} = L^2(X, \mathcal{H}) = \{F : X \to \mathcal{H} \ :\ F \text{ est mesurable et } \int_X \|F(x)\|^2 dm_X(x) < \infty\}.$$

Alors $\widetilde{H}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire évident.

Pour $g \in G, F \in \widetilde{H}$, on définit $\widetilde{\pi}(g)F : X \mapsto \mathcal{H}$ par

$$(\widetilde{\pi}(g)F)(x) = \pi((\alpha(g^{-1}, x)^{-1})F(g^{-1}.x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

Proposition 6.4.2 1. *On a* $\widetilde{\pi}(g)\mathrm{F} \in \widetilde{\mathrm{H}}$ *pour tous* $g \in \mathrm{G}, \mathrm{F} \in \widetilde{\mathrm{H}}$;

2. $\widetilde{\pi}(g)$ *est un opérateur unitaire sur* $\widetilde{\mathcal{H}}$ *pour tout* $g \in \mathrm{G}$;
3. *l'application* $\widetilde{\pi} : \mathrm{G} \to \mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{H}}), g \mapsto \widetilde{\pi}(g)$ *est une représentation unitaire de* G.

Démonstration …■

Définition 6.4.3 (Représentation induite) Soient G un groupe localement compact et Γ un sous-groupe discret de G. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ. La représentation unitaire $(\widetilde{\pi}, \widetilde{\mathcal{H}})$ de G construite plus haut s'appelle la *représentation induite* de π à G et se note souvent $\mathrm{Ind}_\Gamma^\mathrm{G}\pi$.

La proposition suivante est cruciale pour établir la propriété (T) pour un réseau Γ dans G; rappelons que Γ est un réseau si le domaine fondamental $\mathrm{X} \subset \mathrm{G}$ a un volume fini : $m_\mathrm{X}(\mathrm{X}) = m_\mathrm{G}(\mathrm{X}) < \infty$.

Proposition 6.4.4 ***(Continuité de la représentation induite)*** *Soit* Γ *un réseau dans un groupe localement compact* G. *Soit* $(\pi, \mathcal{H})$ *une représentation unitaire de* Γ *sans la propriété (TS). Alors la représentation induite* $\widetilde{\pi} = \mathrm{Ind}_\Gamma^\mathrm{G}\pi$ *ne possède pas la propriété (TS).*

Démonstration On peut supposer que $m_\mathrm{X} = m_\mathrm{G}|_\mathrm{X}$ est une mesure de probabilité sur le domaine fondamental $\mathrm{X} \subset \mathrm{G}$.

Comme π ne possède pas la propriété (TS), il existe une suite $(\xi_n)_n$ dans $\mathcal{H}$ avec $\|\xi_n\| = 1$ et

$$\lim_n \|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma.$$

Soit $\mathrm{F}_n \in \widetilde{\mathcal{H}}$ défini par

$$\mathrm{F}_n(x) = \xi_n \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{X}.$$

Alors

$$\|\mathrm{F}_n\|^2 = \int_\mathrm{X} \|\mathrm{F}_n(x)\|^2 dm_\mathrm{X}(x) = \int_\mathrm{X} \|\xi_n\|^2 dm_\mathrm{X}(x) = 1.$$

Soit $g \in \mathrm{G}$. Alors, on a

$$\|\widetilde{\pi}(g)\mathrm{F}_n - \mathrm{F}_n\|^2 = \int_\mathrm{X} \|\pi(\alpha(g^{-1}, x))\xi_n - \xi_n\|^2 dm_\mathrm{X}(x).$$

Comme

$$\lim_n \|\pi(\alpha(g^{-1},x))\xi_n - \xi_n\|^2 = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in X$$

et comme $\|\pi(\alpha(g^{-1},x))\xi_n - \xi_n\|^2 \leq 2$, on a donc $\lim_n \|\widetilde{\pi}(g)F_n - F_n\| = 0$, par convergence dominée. Ceci montre que $\widetilde{\pi}$ ne possède pas la propriété (TS). ■

Nous aurons besoin d'identifier les vecteurs invariants dans une représentation induite.

Lemme 6.4.5 *Soit* Γ *un réseau dans un groupe localement compact* G *et* $(\pi,\mathcal{H})$ *une représentation unitaire de* Γ. *Soit* $(\widetilde{\pi},\widetilde{\mathcal{H}}) = (\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi, L^2(X,\mathcal{H}))$ *la représentation induite. Alors* $\widetilde{\mathcal{H}}^G$ *est l'ensemble des applications* $F \in L^2(X,\mathcal{H})$ *telles qu'il existe* $\xi \in \mathcal{H}^\Gamma$ *avec* $F(x) = \xi$ *pour* m_X*-presque tout* $x \in X$.

Démonstration Il est clair que, si $F \in L^2(X,\mathcal{H})$ est telle qu'il existe $\xi \in \mathcal{H}^\Gamma$ avec $F(x) = \xi$ pour m_X-presque tout $x \in X$, alors $F \in \widetilde{\mathcal{H}}^G$.

Réciproquement, soit $F \in \widetilde{\mathcal{H}}^G$. Alors, pour tout $g \in G$, on

$$F(g.x) = \pi(\alpha(g,x))F(x) \qquad \text{pour } m_X\text{-presque tout } x \in X.$$

On montre, comme dans la preuve de la Proposition 2.1.11, qu'on peut supposer que, pour tout $g \in G$,

$$F(g.x) = \pi(\alpha(g,x))F(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

On peut supposer que $e \in X$. On a alors, en particulier,

$$F(\gamma.e) = F(e) = \pi(\gamma)F(e) \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma$$

et, par conséquent,

$$F(g.e) = \pi(\alpha(g,e))F(e) = F(e) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G.$$

Comme l'action $G \curvearrowright X$ est transitive, ceci démontre l'assertion.■

Théorème 6.4.6 ***(La propriété (T) est héritée par les réseaux)*** *Soit* G *un groupe localement compact possèdant la propriété (T) et soit* Γ *un réseau dans* G. *Alors* Γ *possède la propriété (T).*

Démonstration Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ sans la propriété (TS). Alors $\widetilde{\pi} = \mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ n'a pas la propriété (TS), par la Proposition 6.4.4. D'où $\widetilde{\mathcal{H}}^G \neq \{0\}$, car G possède la propriété (T). Le lemme précédent montre alors que $\mathcal{H}^\Gamma \neq \{0\}$.■

En combinant leThéorème 6.3.1 avec le Théorème 6.4.6, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 6.4.7 *Le groupe discret* $SL_n(\mathbf{Z})$ *possède la propriété (T) pour* $n \geq 3$. *Plus généralement, tout réseau dans* $SL_n(\mathbf{R})$ *possède la propriété (T) pour* $n \geq 3$.■

Remarque 6.4.8 (Le groupe $SL_2(\mathbf{R})$ n'a pas la propriété (T)) Le groupe $G = SL_2(\mathbf{R})$ possède un réseau Γ qui est isomorphe au groupe libre F_2 sur deux générateurs. En effet, soit $\Gamma(2)$ le noyau de l'homomorphisme $SL_2(\mathbf{Z}) \to SL_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ de reduction modulo 2. Alors $\Gamma(2)$ est un sous-groupe d'indice fini (égal à 6) dans $SL_2(\mathbf{Z})$ et est donc un réseau dans G. D'autre part, $\Gamma(2)$ possède comme sous-groupe d'indice 2 le groupe Γ engendré par les deux matrices suivantes de $SL_2(\mathbf{Z})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe Γ étant libre sur $\{A, B\}$ (voir Exercice 7.4.3), il admet $\mathbf{Z}$ comme quotient qui ne possède pas la propriété (T) (voir Remarque 6.1.2) ; donc Γ ne la possède pas non plus. Le Théorème 6.4.6 implique alors que $G = SL_2(\mathbf{R})$ ne possède pas la propriété (T).

Plus généralement, on peut montrer que les groupes d'isométries $SO(n, 1)$ ou $SU(n, 1)$ des espaces hyperboliques *réels ou complexes* ne possèdent pas la propriété (T). Par contre, le groupe d'isométries $Sp(n, 1)$ de l'espace hyperbolique *quaternionique* possède la propriété (T) ; pour tout ceci, voir la monographie [BHV08].

6.5 La propriété (T) est héritée des réseaux

Nous allons voir que la réciproque du Théorème 6.4.6 est également vraie.

Théorème 6.5.1 ***(La propriété (T) est héritée des réseaux)*** *Soit* G *un groupe localement compact et soit* Γ *un réseau dans* G. *Supposons que* Γ *possède la propriété (T). Alors* G *possède la propriété (T).*

Démonstration Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G sans la propriété (TS) : il existe une suite $(\xi_n)_n$ in G avec $\|\xi_n\| = 1$ telle que, pour tout $Q \subset G$ compact, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{g\in Q} \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| = 0.$$

On considère la décomposition

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}^\Gamma,$$

où $\mathcal{H}_0$ est le complément orthogonal de $\mathcal{H}^\Gamma$ dans $\mathcal{H}$. Soit

$$\xi_n = \xi_n^{(0)} + \xi_n^{(1)} \qquad \text{avec} \qquad \xi_n^{(0)} \in \mathcal{H}_0 \text{ et } \xi_n^{(1)} \in \mathcal{H}^\Gamma$$

la décomposition correspondante de ξ_n. Alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on

$$\|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| = \|\pi(\gamma)\xi_n^{(0)} - \xi_n^{(0)}\| \to_{n\to\infty} 0$$

Comme la représentation $(\pi|_\Gamma, \mathcal{H}_0)$ de Γ ne possède pas de vecteurs invariants non nuls, il s'ensuit qu'on a nécessairement

$$\lim_n \|\xi_n^{(0)}\| = 0.$$

Soit $X \subset G$ un domaine fondamental pour G/Γ et $m_X = m_G|_X$. Il existe $Q \subset X$ compact tel que

$$m_X(X \setminus Q) \leq \frac{1}{10} \qquad (*)$$

et un entier N tel que

$$\sup_{g\in Q} \|\pi(g)\xi_N - \xi_N\| \leq \frac{1}{10} \qquad \text{et} \qquad \lim_n \|\xi_N^{(0)}\| \leq \frac{1}{10}. \qquad (**)$$

Définissons $\eta \in \mathcal{H}$ par

$$\eta := \int_X \pi(x)\xi_N \, dm_X(x).$$

Soit $g \in G$. On a, avec $gx = g.x\alpha(g,x)$, où $g.x \in X$ et $\alpha(g,x) \in \Gamma$, par Γ-invariance de $\xi_N^{(1)}$ et G-invariance de m_X :

$$\begin{aligned}
\pi(g)\eta &= \int_X \pi(gx)\xi_N^{(1)} dm_X(x) \\
&= \int_X \pi(g.x\alpha(g,x))\xi_N^{(1)} dm_X(x) \\
&= \int_X \pi(g.x)\xi_N^{(1)} dm_X(x) \\
&= \int_X \pi(x)\xi_N^{(1)} dm_X(x) \\
&= \eta.
\end{aligned}$$

Donc $\eta \in \mathcal{H}^G$. Il reste à montrer que $\eta \neq 0$. En utilisant $(**)$ et $(*)$, on a

$$\begin{aligned}
\|\eta - \xi_N\| &\leq \int_X \|\pi(x)\xi_N^{(1)} - \xi_N\| dm_X(x) \\
&\leq \int_X \|\pi(x)\xi_N - \xi_N\| dm_X(x) + \int_X \|\pi(x)\xi_N^{(0)}\| dm_X(x) \\
&\leq \int_X \|\pi(x)\xi_N - \xi_N\| dm_X(x) + \frac{1}{10} \\
&\leq \int_Q \|\pi(x)\xi_N - \xi_N\| dm_X(x) + \frac{3}{10} \\
&\leq \frac{4}{10}
\end{aligned}$$

Comme $\|\xi_N\| = 1$, on a donc $\eta \neq 0$.■

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème précédent combiné avec la Remarque 6.4.8.

Corollaire 6.5.2 *Aucun réseau dans* $G = SL_2(\mathbf{R})$ *ne possède la propriété (T). Plus généralement, aucun réseau dans* $G = SO(n,1)$ *ou* $SU(n,1)$ *ne possède la propriété (T).* ■

6.6 Exercices

Exercice 6.6.1 (Propriété (T) pour $SL_n(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$)

(i) Soit $G = SL_n(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$ le produit semi-direct de groupes, donné par l'action standard de $SL_n(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que G possède la propriété (T) de Kazhdan pour $n \geq 3$.

[*Indication :* Utiliser le fait que $SL_n(\mathbf{R})$ possède la propriété (T) de Kazhdan pour $n \geq 3$ en combinaison avec le Lemme de Mautner.]

(ii) Montrer que $\Gamma = SL_n(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^n$, muni de la topologie discrète, possède la propriété (T) de Kazhdan pour $n \geq 3$.

Exercice 6.6.2 (Quelques groupes ne possédant pas la propriété (T)) Soit $n \geq 2$.

(i) Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ ne possède *pas* la propriété (T) de Kazhdan.

(ii) Montrer que $SL_n(\mathbf{Q})$, muni de la topologie discrète, ne possède *pas* la propriété (T) de Kazhdan.

(iii) Généraliser (ii) à $SL_n(\mathbf{K})$ pour tout corps dénombrable infini $\mathbf{K}$.

Exercice 6.6.3 (Quelques propriétés d'hérédité des groupes de Kazhdan)

(i) Soient G un groupe localement compact et N un sous-groupe distingué de G. On suppose que les groupes N et G/N possèdent la propriété (T). Montrer que G la possède aussi.

(ii) Soient G_1 et G_2 deux groupes localement compacts et $\varphi : G_1 \to G_2$ un homorphisme continu d'image dense. On suppose G_1 possède la propriété (T). Montrer que G_2 la possède aussi.

(iii) Soit G un groupe localement compact possédant la propriété (T). Montrer que son abélianisé $G/[G,G]$ est compact, où $[G,G]$ désigne le sous-groupe fermé engendré par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$ avec $a, b \in G$.

(iv) Soit G un groupe localement compact possédant la propriété (T). Montrer que G est unimodulaire.

Exercice 6.6.4 (Deux matrices engendrant un groupe libre) Soient A et B les deux matrices suivantes de $SL_2(\mathbf{Z})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et soit Γ le sous-groupe engendré par A et B.

(i) Soient

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ |x| \leq |y|\}$$

et

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ |y| < |x|\}.$$

Montrer que $A\Omega_1 \subset \Omega_2$ et que $B\Omega_2 \subset \Omega_1$.

(ii) Soit $\omega \in \Omega_1$ fixé. Montrer que $A^{i_1}B^{i_2}\cdots B^{i_{n-1}}A^{i_n}\omega \neq \omega$ pour tous les entiers $i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

(iii) En déduire que Γ est un groupe libre sur A et B.

Chapitre 7

Moyennabilité

Nous allons introduire et étudier la notion de moyennabilité, d'abord pour les actions de groupes, ensuite pour les groupes eux-mêmes. Comme nous le verrons, la moyennabilité est une obstruction à l'existence à la propriété (TS) de trou spectral.

7.1 Actions co-moyennables

Soit G un groupe localement compact et soit $G \curvearrowright X$ une action mesurable sur l'espace mesuré $(X, \mathscr{B}, m)$, avec une mesure σ-finie et G-quasi-invariante m.

Rappelons que G agit par isométries sur $L^\infty(X, m)$ par $(g, \varphi) \mapsto {}_g\varphi$, avec

$$ {}_g\varphi(x) = \varphi(g^{-1}x) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G, \varphi \in L^\infty(X, m), x \in X. $$

et dualement sur l'espace $\mathrm{Moy}(X, m)$ des moyennes :

$$ gM(\varphi) = M({}_{g^{-1}}\varphi) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G, M \in \mathrm{Moy}(X, m), \varphi \in L^\infty(X, m). $$

Définition 7.1.1 (Action co-moyennable) On dit que l'action $G \curvearrowright (X, m)$ est *co-moyennable* si $\mathrm{Moy}(X, m)^G \neq \emptyset$.

Remarque 7.1.2 Nous aurions pu plutôt parler d'actions *moyennables* au lieu d'actions *co-moyennables* ; nous ne le faisons pas, car une notion d'action moyennable, distincte de la nôtre (moyennabilité au sens de Zimmer), est désormais bien établie dans la littérature (voir [Zimm84]).

Etant donnée une action $G \curvearrowright (X, m)$, il sera techniquement utile de considérer le sous-espace $L^\infty(X)_{G,c}$ de $L^\infty(X, m)$ des fonctions G-*continues*, c-à-d, l'espace $L^\infty(X)_{G,c}$ des fonctions $\varphi \in L^\infty(X, m)$ pour lesquelles l'application

$$G \to L^\infty(X), \qquad g \mapsto {}_g\varphi$$

est continue ($L^\infty(X, m)$ étant muni de la topologique normique).

Des fonctions dans $L^\infty(X)_{G,c}$ sont obtenues ainsi. Pour $f \in L^1(G)$ et $\varphi \in L^\infty(X, m)$, soit $f * \varphi : X \to \mathbf{C}$ définie par

$$f * \varphi(x) = \int_G f(g)\varphi(g^{-1}x)\,dm_G(g) \qquad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

Lemme 7.1.3 *(i) Soient* $f \in L^1(G)$, $\varphi \in L^\infty(X, m)$ *et* $g \in G$. *Alors*

- $\|f * \varphi\|_\infty \le \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty$;
- ${}_g(f * \varphi) = {}_g f * \varphi$;
- $G \to L^1(G), g \mapsto {}_g f$ *est continue ;*
- $f * \varphi \in L^\infty(X)_{G,c}$.

(ii) Soit $M \in \mathrm{Moy}(X, m)^G$. *Alors, pour tout* $f \in \mathrm{Dens}(G, m_G)$ *et* $\varphi \in L^\infty(X)_{G,c}$, *on a*

$$M(f * \varphi) = M(\varphi).$$

Démonstration $\cdots\blacksquare$

Définition 7.1.4 Une moyenne $M \in \mathrm{Moy}(X, m)$ est dite *topologiquement invariante* si

$$M(f * \varphi) = M(\varphi) \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{Dens}(G, m_G) \text{ et } \varphi \in L^\infty(X).$$

Proposition 7.1.5 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) L'action $G \curvearrowright (X, m)$ *est co-moyennable ;*

(ii) il existe une moyenne $M \in \mathrm{Moy}(X, m)$ *qui est topologiquement invariante.*

Démonstration Supposons que $G \curvearrowright (X, m)$ est co-moyennable et soit $M \in \mathrm{Moy}(X, m)^G$. Soit $(f_n)_n \in \mathrm{Dens}(G, m_G)$ une unité appochée dans $L^1(G, m_G)$.

Soient $f \in \mathrm{Dens}(G, m_G)$ et $\varphi \in L^\infty(X)$. Alors $\lim_n \|f * f_n - f\|_1 = 0$ et donc

$$\lim_n \|f * f_n * \varphi - f * \varphi\|_\infty = 0.$$

Comme $f_n * \varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X})_{\mathrm{G},c}$, il s'ensuit en utilisant le Lemme 7.1.3 que

$$\mathrm{M}(f * \varphi) = \lim_n \mathrm{M}(f * f_n * \varphi) = \lim_n \mathrm{M}(f_n * \varphi).$$

En particulier, pour *toutes* $f, f' \in \mathrm{Dens}(\mathrm{G}, m_\mathrm{G})$, on a

$$\mathrm{M}(f * \varphi) = \mathrm{M}(f' * \varphi) \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}).$$

Fixons $f_0 \in \mathrm{Dens}(\mathrm{G}, m_\mathrm{G})$ et définissons $\mathrm{M}' \in \mathrm{Moy}(\mathrm{X}, m)$ par

$$\mathrm{M}'(\varphi) = \mathrm{M}(f_0 * \varphi) \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}).$$

Alors M' est topologiquement invariante : en effet, soit $f \in \mathrm{Dens}(\mathrm{G}, m_g)$ et $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X})$. Alors, comme $f_0 * f \in \mathrm{Dens}(\mathrm{G}, m_g)$, on a

$$\mathrm{M}'(f * \varphi) = \mathrm{M}(f_0 * f * \varphi) = \mathrm{M}(f_0 * \varphi) = \mathrm{M}'(\varphi).$$

Réciproquement, soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Moy}(\mathrm{X}, m)$ topologiquement invariante. Alors $\mathrm{M} \in \mathrm{Moy}(\mathrm{X}, m)^\mathrm{G}$. En effet, fixons $f \in \mathrm{Dens}(\mathrm{G}, m_g)$. Alors, pour tout $g \in \mathrm{G}$ et $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X})$, on a $f * {}_g\varphi = f_g * \varphi$, où $f_g \in \mathrm{Dens}(\mathrm{G}, m_\mathrm{G})$ est définie par

$$f_g(h) = \Delta_\mathrm{G}(g^{-1}) f(hg^{-1}) \qquad \text{pour tout} \quad h \in \mathrm{G},$$

et donc

$$\mathrm{M}({}_g\varphi) = \mathrm{M}(f * {}_g\varphi) = \mathrm{M}(f_g * \varphi) = \mathrm{M}(\varphi).\blacksquare$$

Soit $(\pi_\mathrm{X}, \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, m))$ la representation de Koopman associée à l'action $\mathrm{G} \curvearrowright (\mathrm{X}, m)$. La Proposition 5.3.7) montre que, si π_X n'a pas la propriété (TS), alors $\mathrm{G} \curvearrowright (\mathrm{X}, m)$ est co-moyennable. Nous allons voir que la réciproque est vraie également.

Nous aurons besoin de considérer l'action de G par isométries sur $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, m)$ donnée par

$$\pi_\mathrm{X}(g)\xi(x) = c(g^{-1}, x)\xi(g^{-1}x) \qquad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, m), g \in \mathrm{G}, x \in \mathrm{X},$$

où $c(g, x) = \dfrac{dgm(x)}{dm(x)}$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure image gm par rapport à m. Il en découle une structure de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$-module sur $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, m)$ donnée pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ et $\xi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, m)$ par

$$f * \xi(x) = \int_\mathrm{G} f(g)\pi_\mathrm{X}(g)\xi(x)\, dm_\mathrm{G}(g) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{X}.$$

Pour $f \in L^1(G), \xi \in L^1(X, m)$ et $\varphi \in L^\infty(X, m)$, on vérifie que la formule suivante est valable :

$$\int_X (f * \xi)(x)\varphi(x)dm(x) = \int_X \xi(x)(\check{f} * \varphi)(x)dm(x),$$

où $\check{f} \in L^1(G)$ est défini par $\check{f}(g) = \Delta_G(g^{-1})f(g^{-1})$.

Théorème 7.1.6 *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une action du groupe localement compact* G *sur un espace mesuré* (X, m) :

(i) L'action $G \curvearrowright (X, m)$ *est co-moyennable ;*

(ii) la representation de Koopman $(\pi_X, L^2(X, m))$ *associée ne possède pas la propriété (TS).*

Démonstration Comme indiqué plus haut, seule l'implication $(i) \Longrightarrow (i)$ reste à démontrer.

Soit $\mathscr{L}$ une partie dénombrable dense de $\mathrm{Dens}(G, m_G)$, pour la norme L^1. Pour chaque $f \in \mathscr{L}$, prenons une copie de $L^1(X)$ et considèrons l'espace produit

$$E = \prod_{f \in \mathscr{L}} L^1(X),$$

muni de la topologie produit des topologies normiques. Alors E est un espace vectoriel localement convexe ; de plus, la topologie faible $\sigma(E, E')$ est la topologie produit des topologies faibles $\sigma(L^1(X), L^\infty(X))$. On considère la partie suivante Σ de E :

$$\Sigma = \left\{(f * \xi - \xi)_{f \in \mathscr{L}} : \xi \in \mathrm{Dens}(X, m)\right\} \subset E.$$

Par la Proposition 7.1.5, il existe une moyenne $M \in \mathrm{Moy}(X, m)$ qui est topologiquement invariante.

Soit $\varphi \in L^\infty(X, m)$. Comme, par le Lemme 5.3.4, $\mathrm{Dens}(X, m)$ est dense dans $\mathrm{Moy}(X, m)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty(X), L^1(X))$, il existe une suite $(\xi_n)_n$ dans $\mathrm{Dens}(X, m)$, dépendante de φ, avec

$$M(\varphi) = \lim_n \int_X \xi_n \varphi dm.$$

Comme M est topologiquement invariante, on a alors,

$$\lim_n \left(\int_X \xi_n (f * \varphi) dm - \int_X \xi_n \varphi dm \right) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{Dens}(G, m_G).$$

D'autre part, comme (voir la formule plus haut)

$$\int_X \xi_n (f * \varphi) dm = \int_X (\check{f} * \xi_n) \varphi dm,$$

il s'ensuit que

$$\lim_n \int_X (f * \xi_n - \xi_n) \varphi dm = 0 \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{Dens}(G, m_G).$$

Ceci montre que 0 appartient à l'adhérence faible de Σ dans E. Or, comme Σ est convexe, son adhérence forte coincide avec son adhérence faible, par le Théorème de Hahn-Banach. Donc 0 appartient à l'adhérence forte de Σ dans E. Il existe ainsi une suite $(\xi_n)_n$ dans $\mathrm{Dens}(X, m)$ avec

$$\lim_n \|f * \xi_n - \xi_n\|_1 = 0, \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathscr{L} \subset \mathrm{Dens}(G, m_G).$$

Par densité de $\mathscr{L}$, il s'ensuit que

$$\lim_n \|f * \xi_n - \xi_n\|_1 = 0, \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathrm{Dens}(G, m_G).$$

Soit $g \in G$. Comme

$$\|\pi_X(g)(f * \xi_n) - f * \xi_n\|_1 \leq \|({}_g f) * \xi_n - \xi_n\|_1 + \|f * \xi_n - \xi_n\|_1,$$

on a

$$\lim_n \|\pi_X(g)(f * \xi_n) - f * \xi_n\|_1 = 0 \qquad \text{pour tout} \quad g \in G.$$

Fixons $f \in \mathscr{L}$ et posons $\eta_n = \sqrt{f * \xi_n}$. Alors

$$\|\eta_n\|_2^2 = \|f * \xi_n\|_1 = 1.$$

De plus, pour tout $g \in G$, on a

$$\lim_n \|\pi_X(g)\eta_n - \eta_n\|_2 = 0;$$

en effet, en utilisant l'inégalité élémentaire $|\sqrt{a} - \sqrt{b}|^2 \leq |a - b|$ valable pour tous nombres réels $a, b \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\|\pi_X(g)\eta_n - \eta_n\|_2^2 &= \int_X \left| \sqrt{c(g^{-1}, x) f * \xi_n(g^{-1}x)} - \sqrt{f * \xi_n(x)} \right|^2 dm(x) \\
&\leq \int_X |(c(g^{-1}, x) f * \xi_n(g^{-1}x) - f * \xi_n(x)| dm(x) \\
&= \|\pi_X(g)(f * \xi_n) - f * \xi_n\|_1.
\end{aligned}$$

En conclusion, π_X n'a pas la propriété (TS).■

7.2 Groupes moyennables

Nous introduisons maintenant une classe éminemment importante de groupes localement compacts.

Définition 7.2.1 Un groupe localement compact G est dit *moyennable* si l'action $G \curvearrowright (G, m_G)$ de G sur lui-même par translations à gauche est co-moyennable.

Remarque 7.2.2 Le groupe localement compact G est donc moyennable s'il existe une moyenne sur $L^\infty(G, m_G)$ qui est invariante par translations à gauche.

Exemple 7.2.3 Les premiers exemples de groupes moyennables sont les groupes compacts. En effet, si G est un groupe compact, alors sa mesure de Haar normalisée m_G définit une moyenne G-invariante sur $L^\infty(G, m_G)$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 7.1.6.

Théorème 7.2.4 ***(Théorème de Hulanicki-Reiter)*** *Soit* G *un groupe localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) G *est moyennable ;*
(ii) la representation régulière $(\pi_G, L^2(G, m_G))$ *ne possède pas la propriété (TS).*■

Le corollaire suivant découle du théorème précédent, de la définition de la propiété (T) et du fait que $L^2(G, m_G)^G \neq \{0\}$ si et seulement si G est compact.

Corollaire 7.2.5 *Soit* G *un groupe localement compact et moyennable. Alors* G *a la propriété (T) si et seulement si* G *est compact.*■

Les groupes moyennables peuvent être caractérisés par diverses propriétés, la plus importante d'entre elles étant celle du point fixe. Avant de l'énoncer, mentionnons le lemme général suivant.

Lemme 7.2.6 ***(Barycentre d'une mesure de probabilité)*** *Soit* $\mathscr{C}$ *une partie convexe et compacte d'un espace vectoriel localement convexe* V. *Il existe une application*

$$\mathrm{bar} : \mathrm{Prob}(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}, \ \mu \mapsto \mathrm{bar}(\mu)$$

caractérisée par la propriété

$$\varphi(\mathrm{bar}(\mu)) = \int_{\mathscr{C}} \varphi(x)\, d\mu(x) \qquad \textit{pour tout} \quad \varphi \in V'.$$

De plus, pour toute transformation continue et affine $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, *on a*

$$\mathrm{bar}(f_*(\mu)) = f(\mathrm{bar}(\mu)).$$

Démonstration Voir [Rudi73], Chapitre 3. ■

Remarque 7.2.7 L'élément $\mathrm{bar}(\mu) \in \mathscr{C}$ plus haut est appelé le *barycentre* de la mesure de probabilité $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathscr{C})$ et est noté $\int_{\mathscr{C}} x d\mu(x)$. Si $\mu = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i}$ est une combinaison convexe de mesures de Dirac, alors, bien sûr, $\mathrm{bar}(\mu) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$.

Théorème 7.2.8 ***(Propriété du point fixe)*** *Soit* G *un groupe localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est moyennable ;*

(ii) pour toute action continue $G \curvearrowright \mathscr{C}$ *de* G *par transformations affines sur une partie convexe, compacte et non vide* $\mathscr{C}$ *d'un espace vectoriel localement convexe, on a*

$$\mathscr{C}^{G} \neq \emptyset.$$

Démonstration Supposons que G possède la propriété du point fixe (ii). Alors (voir Lemme 5.3.4), $\mathscr{C} = \mathrm{Moy}(G, m_G)$ est une partie convexe, compacte et non vide de $L^\infty(G, m_G)'$, muni de la topologie faible $\sigma(L^\infty(G)', L^\infty(G))$. De plus, G agit de manière continue par transformations affines sur $\mathscr{C}$. D'ou $\mathscr{C}^G \neq \emptyset$, c-à-d G est moyennable.

Réciproquement, supposons que G est moyennable. Il existe donc une moyenne $M \in \mathrm{Moy}(G, m_G)^G$. Soit $\mathscr{C}$ une partie convexe, compacte et non vide d'un espace vectoriel localement convexe et soit $G \curvearrowright \mathscr{C}$ une action continue de G par transformations affines. Fixons $x_0 \in \mathscr{C}$. L'application orbitale

$$\theta : G \to \mathscr{C}, g \mapsto g x_0$$

est continue et G-équivariante. Comme $\mathscr{C}$ est compacte, $\theta_*(M)$ (voir Lemme 5.3.5) définit une mesure de probabilité $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathscr{C})$ par

$$\int_{\mathscr{C}} f d\mu = \theta_*(M)(f) = M([f \circ \theta]) \qquad \text{pour tout} \quad f \in C(\mathscr{C}),$$

où $[f\circ\theta]$ est la classe de $f\circ\theta$ dans $L^\infty(G, m_G)$. Pour tout $g\in G$ et $f\in C(\mathscr{C})$, on a, par équivariance de θ et invariance de M,

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{C}} f\,dg\mu = \int_{\mathscr{C}} {}_g f\,d\mu &= M([{}_g f\circ\theta]) \\ &= M([{}_g(f\circ\theta)]) = M({}_g[f\circ\theta]) = M([f\circ\theta]) \\ &= \int_{\mathscr{C}} f\,d\mu.\end{aligned}$$

Ceci montre que μ est G-invariante. Soit $\mathrm{bar}(\mu)\in\mathscr{C}$ le barycentre de μ (voir Lemme 7.2.6). Alors $\mathrm{bar}(\mu)\in\mathscr{C}^G$, car

$$g\,\mathrm{bar}(\mu) = \mathrm{bar}(g\mu) = \mathrm{bar}(\mu) \qquad \text{pour tout} \quad g\in G.\blacksquare$$

Le corollaire suivant montre que la moyennabilité est une obstruction à la propriété (TS).

Corollaire 7.2.9 *Soit* G *un groupe localement compact et moyennable. Alors toute action* $G\curvearrowright(X,m)$ *sur un espace mesuré* (X,m) *est co-moyennable.*

Démonstration On applique la propriété de point fixe au convexe compact $\mathscr{C} = \mathrm{Moy}(X,m)$.$\blacksquare$

7.3 Exemples de groupes moyennables

En dehors des groupes compacts (voir Exemple 7.2.3), les premiers exemples de groupes moyennables sont les groupes abéliens.

Théorème 7.3.1 ***(Théorème de Markov-Kakutani)*** *Soit* G *un groupe abélien localement compact Alors* G *est moyennable.*

Démonstration Montrons que G possède la propriété du point fixe.

Soit donc $G\curvearrowright\mathscr{C}$ une action de G par transformations affines sur une partie convexe, compacte et non vide $\mathscr{C}$ d'un espace vectoriel localement convexe V.

Pour tout entier $n\in\mathbf{N}$ et tout g in G, considérons l'application

$$A_n(g) : \mathscr{C}\to\mathscr{C}$$

affine et continue définie par

$$A_n(g)x = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} g^i x \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathscr{C}.$$

Soit S the semi-groupe de transformations continues et affines de $\mathscr{C}$ engendré par $\{A_n(g) : n \in \mathbf{N}, g \in G\}$. Observons que S est abélien :

$$s_1 s_2 = s_2 s_1 \qquad \text{pour tout} \quad s_1, s_2 \in S.$$

Observons aussi que, comme $\mathscr{C}$ est compact, $s(\mathscr{C})$ une partie compacte et donc fermée de $\mathscr{C}$, pour tout $s \in S$.

Montrons que

$$\bigcap_{s\in S} s(\mathscr{C}) \neq \emptyset.$$

Comme $\mathscr{C}$ is compact, il suffit de montrer ("propriété de l'intersection finie") que

$$\bigcap_{i=1}^{n} s_i(\mathscr{C}) \neq \emptyset \qquad \text{pour tout} \quad s_1, \ldots, s_n \in S.$$

Soient $s_1, \ldots, s_n \in S$; posons $s = s_1 \ldots s_n \in S$. Alors, comme S est abélien,

$$s(\mathscr{C}) \subset s_i(\mathscr{C}) \qquad \text{pour tout} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Il s'ensuit que

$$s(\mathscr{C}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} s_i(\mathscr{C}) \neq \emptyset$$

et l'assertion est prouvée.

Montrons que tout point $x_0 \in \bigcap_{s\in S} s(\mathscr{C})$ est un point fixe pour G.

Soit $g \in G$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors x_0 s'ecrit sous la forme

$$x_0 = A_n(g)x \qquad \text{pour un certain } x \in \mathscr{C}.$$

Soit $\varphi \in V'$, une forme linéaire continue sur V; alors, avec

$$C = \sup_{y\in\mathscr{C}} |\varphi(y)| < \infty,$$

on a

$$|\varphi(x_0 - gx_0)| = \frac{1}{n+1}|\varphi(x) - \varphi(g^{n+1}x)| \leq \frac{2C}{n+1} \to_{n\to\infty} 0.$$

Ceci montre que $\varphi(x_0) = \varphi(gx_0)$ pour tout $\varphi \in V'$. Comme V est localement convexe, V' sépare les points de V et on a donc

$$x_0 = gx_0 \qquad \text{pour tout} \quad g \in G. \blacksquare$$

Avant de donner d'autres exemples de groupes moyennables, montrons que la moyennabilité jouit de bonnes propriétés d'hérédité.

Proposition 7.3.2 *Soient* G *un groupe localement compact et* N *un sous-groupe distingué fermé de* G.
(i) Si G *est moyennable, alors* G/N *est moyennable.*
(ii) Si N *et* G/N *sont moyennables, alors* G *est moyennable.*

Démonstration (i) découle directement de la propriété de point fixe.
(ii) Soit $G \curvearrowright \mathscr{C}$ une action de G par transformations affines sur une partie convexe, compacte et non vide $\mathscr{C}$ d'un espace vectoriel localement convexe V. Par restriction et moyennabilité de N, on a $\mathscr{C}^N \neq \emptyset$. Alors $\mathscr{C}^N$ est une partie convexe, compacte et non vide de V. De plus, G laisse $\mathscr{C}^N$ invariant. Comme N agit trivialement sur $\mathscr{C}^N$, cette action factorise par G/N. Par moyennabilité de G/N, on a donc $(\mathscr{C}^N)^{G/N} \neq \emptyset$ et ainsi $\mathscr{C}^G \neq \emptyset$.$\blacksquare$

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 7.3.3 *Tout groupe résoluble est moyennable.*$\blacksquare$

Exemple 7.3.4 Montrons que le groupe libre F_2 sur deux générateurs a, b n'est *pas* moyennable.

En effet, supposons, par l'absurde qu'il existe une moyenne invariante M sur $\ell^\infty(F_2)$. Ecrivons M(X) au lieu de $M(\mathbf{1}_X)$ pour une partie X de F_2 et considérons la partie $A \subset F_2$ formée des mots dans F_2 qui commencent par une puissance non nulle de a. Alors $F_2 = A \cup aA$. Comme

$$M(aA) = M(A) \text{ et } M(F_2) = 1,$$

on a donc nécessairement $M(A) \geq 1/2$.

D'autre part, A, bA et b^2A sont des parties deux-à-deux disjointes de F_2. Comme

$$M(bA) = M(b^2A) = M(A) \text{ et } M(F_2) = 1,$$

on a donc $M(A) \leq 1/3$. Ceci est absurde.

7.4 Exercices

Exercice 7.4.1 (Vecteurs presqu'invariants) Soit $(\pi_{\mathbf{R}}, L^2(\mathbf{R}))$ la représentation régulière de $\mathbf{R}$. Construire explicitement une suite (f_n) dans $L^2(\mathbf{R})$ avec $\|f_n\|_2 = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \|\pi_{\mathbf{R}}(g)f_n - f_n\|_2 = 0$ uniformément sur chaque partie compacte de $\mathbf{R}$.

Exercice 7.4.2 (Moyennabilité d'une limite inductive) Soit G un groupe localement compact. On suppose qu'il existe une suite croissante de sous-groupe fermés et moyennables G_n de G tels que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} G_n$ est dense dans G. Montrer que G est moyennable.

En déduire que le groupe $\mathscr{S}_{\text{fin}}(\mathbf{N})$ des bijections $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ de support fini (c-à-d $\sigma(n) \neq n$ pour au plus un nombre fini d'entiers $n \in \mathbf{N}$) est moyennable.

Exercice 7.4.3 (Suites de Følner) Soit Γ un groupe dénombrable *moyennable* et soit F une partie finie de Γ.
(i) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in \ell^1(\Gamma)_{1,+}$ (c-à-d $f \geq 0$ et $\|f\|_1 = 1$) tel que

$$\|\pi_\Gamma(\gamma)f - f\|_1 \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in F$$

(avec $\pi_\Gamma(\gamma)f(x) = f(\gamma^{-1}x)$).
(ii) Soient f, f' deux fonctions dans $\ell^1(\Gamma)$ avec $f \geq 0, f' \geq 0$. Pour $t > 0$, soit

$$S_t = \{\gamma \in \Gamma \ : \ f(\gamma) > t\} \text{ et } S'_t = \{\gamma \in \Gamma \ : \ f'(\gamma) > t\}.$$

Montrer que

$$\|f - f'\|_1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{Card}(S_t \triangle S'_t)\, dt;$$

en particulier, $\|f\|_1 = \int_0^\infty \mathrm{Card}(S_t)\, dt$.

[*Indication :* On pourra écrire $\mathrm{Card}(S_t \triangle S'_t)$ comme une somme de fonctions indicatrices d'intervalles évaluées en $t > 0$.]

(iii) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une partie finie et non vide S de Γ telle que

$$\frac{\mathrm{Card}(\gamma S \triangle S)}{\mathrm{Card}(S)} \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in F.$$

(iv) Montrer qu'il existe une suite, dite *suite de Følner*, de parties S_n finies et non vides de Γ telle que

$$\lim_n \frac{\mathrm{Card}(\gamma S_n \triangle S_n)}{\mathrm{Card}(S_n)} = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma.$$

(v) Donner un exemple d'une suite de Følner pour $\Gamma = \mathbf{Z}$.

Exercice 7.4.4 (Action de Bernoulli et trou spectral) Soit Γ un groupe dénombrable infini. On considère l'action de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ de Γ sur $X = \{0,1\}^{\Gamma}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ possède la propriété (TS) de trou spectral ;
2. Γ n'est pas moyennable.

Exercice 7.4.5 (Croissance de groupes et moyennabilité)

Soit Γ un groupe de type fini et soit S une partie génératrice finie telle que $S = S^{-1}$. On définit la longueur $\ell_S(\gamma)$ d'un élément $\gamma \in \Gamma$ par $\ell_S(\gamma) = \min\{n \in \mathbf{N} : \gamma \in S^n\}$. Soit

$$d_S : \Gamma \times \Gamma \to \mathbf{R},\ (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \ell_S(\gamma_2^{-1}\gamma_1).$$

(i) Vérifier que d_S est une distance sur Γ invariante par translations à gauche.

Pour tout $n \geq 1$, soit B_n la boule de rayon n dans Γ pour la distance d_S.

(ii) Montrer que $\kappa_S := \lim_{n\to\infty} \mathrm{Card}(B_n)^{1/n}$ existe.

[*Indication :* Montrer que la suite $(\log(\mathrm{Card}(B_n)))_{n\in\mathbf{N}}$ est sous-additive.]

(iii) Montrer que si $\kappa_S = 1$, alors $\kappa_{S'} = 1$ pour tout autre partie génératrice finie S' de Γ telle que $S' = S'^{-1}$.

On dit que Γ est à croissance sous-exponentielle si $\kappa_S = 1$. C'est le cas, en particulier, si Γ est à croissance polynomiale, c-à-d $\mathrm{Card}(B_n) \leq P(n)$ pour un polynôme P.

(iv) Montrer que, si Γ est à croissance sous-exponentielle, alors Γ est moyennable.

[*Indication :* Construire, à l'aide des boules B_n, une suite de fonctions $f_n \in \ell^2(\Gamma)$ avec $\|f_n\| = 1$ et $\lim_n \|\pi_\Gamma(\gamma)f_n - f_n\| = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.]

(v) Soit Γ le groupe de Heisenberg discret, c-à-d le sous-groupe de $SL_3(\mathbf{Z})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $x, y, z \in \mathbf{Z}$. Montrer que Γ est de type fini et à croissance polynomiale.

Exercice 7.4.6 (Actions ergodiques co-moyennables et propriété (T)) Soit G un groupe localement compact possédant *la propriété (T)* et soit $G \curvearrowright (X, m)$ une action avec une mesure m quasi-invariante et σ-finie. On suppose que $G \curvearrowright (X, m)$ est *co-moyennable.*

(i) Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^1(X, m)_{1,+}$ telle que

$$\frac{dgm}{dm}(x) f(gx) = f(x) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G,\ x \in X.$$

(ii) On suppose, de plus, que $G \curvearrowright (X, m)$ est ergodique. Montrer que m est équivalente à une mesure de probabilité G-invariante sur X.

Exercice 7.4.7 (Actions fortement ergodiques et trou spectral) Soit Γ un groupe dénombrable discret et $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ une action mesurable sur un espace de probabilité $(X, \mathscr{B}, m)$, avec une mesure Γ-invariante m.

L'action $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ est dite *fortement ergodique* si, pour toute suite $A_n \in \mathscr{B}$ telle que

$$\lim_n m(\gamma A_n \triangle A_n) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma,$$

on a $\inf_n m(A_n)(1 - m(A_n)) = 0$.
(i) On suppose que l'action $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ possède un trou spectral. Montrer que $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ est fortement ergodique.
(ii) Montrer que, si Γ possède la propriété (T) et si $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ est ergoddique, alors $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ est fortement ergodique.

Soit Γ_1 le sous groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ engendré par les deux matrices $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On rappelle que Γ_1 est un groupe libre sur $\{a, b\}$.
(iii) Soit $Y = \{0,1\}^{\Gamma_1}$ avec la mesure de probabilité habituelle m. Montrer que l'action de Bernoulli $\Gamma_1 \curvearrowright (Y, m)$ possède un trou spectral et est donc fortement ergodique.

Soit $X := Y \times \mathbf{N}^*$, muni de la mesure de probabilité μ définie par

$$\mu(A) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} m\big(\{y \in Y \ : \ (y, n) \in A\}\big), \qquad A \subset X \text{ mesurable.}$$

On admettra qu'il existe $T : X \to X$ mesurable, bijective et préservant μ telle que $T(Y \times \{n\}) \subset Y \times \{n-1\}$ pour tout $n \geq 2$.

Soit $\Gamma = F_3$ le groupe libre sur 3 générateurs a, b, c (avec a, b comme plus haut). On définit une action de Γ sur (X, μ) par

$$a(y, n) := (ay, n),\ b(y, n) := (by, n),\ c(y, n) := T(y, n) \text{ pour } (y, n) \in X.$$

(iv) Montrer que $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est fortement ergodique mais ne possède pas de trou spectral.

Chapitre 8

Marches aléatoires sur des espaces homogènes et normes d'opérateurs de Markov

Pour des raisons de simplicité, nous ne considérerons que des groupes dénombrables discrets dans ce chapitre. On fixe un tel groupe Γ ainsi qu'une mesure de probabilité $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ sur Γ.

8.1 Marches aléatoires sur des espaces homogènes

On considère la marche aléatoire sur Γ associée à μ et définie par des variables aléatoires i.i.d. X_n à valeurs dans Γ, avec $X_0 = e$; la position Z_n de la marche à l'instant n est donnée par $Z_n = X_n X_{n-1} \cdots X_0$, avec les probabilités de transition

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} = y | Z_n = x) = \mu(y^{-1}x).$$

Soit maintenant $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ une action de Γ sur l'espace de mesuré (X, m). On considère l'*opérateur de Markov* $\pi_X(\mu)$ sur $L^2(X, m)$, défini par

$$\pi_X(\mu)\xi(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\gamma)\pi_X(\gamma)\xi(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\gamma)\xi(\gamma^{-1}x) \qquad \text{pour tout} \quad \xi \in L^2(X, m)$$

Comme la prochaine section le montrera, il est intéressant de considérer la norme d'opérateur de $\pi_X(\mu)$ sur $L^2(X, m)$; si m est une mesure de probabilité invariante, alors $L^2_0(X)$ est $\pi_X(\mu)$-invariant et c'est plutôt la norme de $\pi_X(\mu)$ sur $L^2_0(X)$ qui sera intéressante.

8.2 Représentation unitaires et opérateurs de Markov

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ et $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$. On définit un opérateur linéaire $\pi(\mu) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ par

$$\pi(\mu)\xi = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma)\pi(\gamma)\xi \qquad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Proposition 8.2.1 *1. On a* $\|\pi(\mu)\| \leq 1$, *c-à-d* $\pi(\mu)$ *est une contraction.*

2. *Un vecteur* $\xi \in \mathcal{H}$ *est un point fixe de* $\pi(\mu)$ *(c-à-d* $\pi(\mu)\xi = \xi$*) si et seulement si* $\pi(\gamma)\xi = \xi$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma(\mu)$, *où* $\Gamma(\mu) =< \mathrm{supp}(\mu) >$ *est le sous-groupe engendré par le support de* μ.
3. *Une suite* $(\xi_n)_n$ *dans* $\mathcal{H}$ *avec* $\|\xi_n\| = 1$ *est une suite de points fixes approchés de* $\pi(\mu)$, *c-à-d* $\lim_n \|\pi(\mu)\xi_n - \xi_n\| = 0$, *si et seulement*

$$\lim_n \|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| = 0 \qquad \textit{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma(\mu).$$

Démonstration (i) est évident
(ii) Si $\pi(\gamma)\xi = \xi$ pour tout $\gamma \in \Gamma(\mu)$, alors il est évident que $\pi(\mu)\xi = \xi$. Réciproquement, supposons que $\pi(\mu)\xi = \xi$. Alors

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma)(\|\xi\|^2 - \langle \pi(\gamma)\xi, \xi \rangle) = \|\xi\|^2 - \langle \pi(\mu)\xi, \xi \rangle = 0$$

Comme, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|\xi\|^2 - \langle \pi(\gamma)\xi, \xi \rangle \geq 0$, il s'ensuit que $\|\xi\|^2 = \langle \pi(\gamma)\xi, \xi \rangle$ et donc $\pi(\gamma)\xi = \xi$ (par le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz) pour tout $\gamma \in \mathrm{supp}(\mu)$. Ceci implique que $\pi(\gamma)\xi = \xi$ pour tout $\gamma \in \Gamma(\mu)$.
(iii) Supposons que $\lim_n \|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma(\mu)$; comme

$$\|\pi(\mu)\xi_n - \xi_n\| \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma)\|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\|$$

et comme $\|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| \leq 2$ pour tout n et tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\lim_n \|\pi(\mu)\xi_n - \xi_n\| = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\lim_n \|\pi(\mu)\xi_n - \xi_n\| = 0$. Pour tout n, on a

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma)(1 - \langle \pi(\gamma)\xi_n, \xi_n \rangle) = \langle \xi_n, \xi_n - \pi(\mu)\xi_n \rangle$$

et, comme (par Cauchy-Schwarz),

$$|\langle \xi_n, \xi_n - \pi(\mu)\xi_n\rangle| \leq \|\pi(\mu)\xi_n - \xi_n\|,$$

on a donc

$$\lim_n \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\gamma)(1 - \langle \pi(\gamma)\xi_n, \xi_n\rangle) = 0.$$

Ceci implique que $\lim_n \langle \pi(\gamma)\xi_n, \xi_n\rangle = 1$ et donc

$$\lim_n \|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\|^2 = \lim_n 2(1 - \mathrm{Re}\langle \pi(\gamma)\xi_n, \xi_n\rangle) = 0$$

pour tout $\gamma \in \mathrm{supp}(\mu)$. L'inégalité triangulaire montre alors que

$$\lim_n \|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma(\mu).\blacksquare$$

Rappelons que le produit de convolution de $\mu_1, \mu_2 \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ est la mesure de probabilité $\mu_1 * \mu_2 \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ définie par

$$\mu_1 * \mu_2(\gamma) = \sum_{\delta\in\Gamma} \mu_1(\gamma\delta)\mu_2(\delta^{-1}) \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma.$$

La symétrisée de $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ est la mesure de probabilité $\check{\mu}$ définie par

$$\check{\mu}(\gamma) = \mu(\gamma^{-1}) \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma.$$

Définition 8.2.2 La mesure de probabilité μ sur Γ est dite *adaptée* si $\Gamma(\mu) = \Gamma$; elle est dite *fortement adaptée* si la mesure $\check{\mu} * \mu$ est adaptée.

Remarque 8.2.3 (i) On peut montrer que (voir Exercice 8.4.1) la mesure de probabilité μ est fortement adaptée si et seulement si $\mathrm{supp}(\mu)$ n'est pas contenu dans la classe à gauche (ou à droite) d'un sous-groupe propre de Γ.
(ii) Une mesure fortement adaptée est adaptée, mais la réciproque est fausse : la mesure δ_1 sur $\mathbf{Z}$ est adaptée et n'est pas fortement adaptée (car $\check{\mu} * \mu = \delta_0$ n'est pas adaptée). Par contre, la mesure $\mu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_0)$ sur $\mathbf{Z}$ est fortement adaptée. En général, si $e \in \mathrm{supp}(\mu)$ et si μ est adaptée, alors μ est fortement adaptée (voir Exercice 8.4.1).
(iii) Soient $\mu, \nu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$. Alors (voir Exercice 8.4.2)

$$\pi(\mu * \nu) = \pi(\mu)\pi(\nu) \qquad \text{et} \qquad \pi\check{\mu}) = \pi(\mu)^*.$$

En particulier, $\check{\mu} * \mu$ est un opérateur auto-adjoint positif.

La proposition suivante lie la propriété (TS) de la représentation π à la norme de l'opérateur $\pi(\mu)$.

Proposition 8.2.4 *Soient* Γ *un groupe dénombrable et* $(\pi, \mathcal{H})$ *une représentation unitaire de* Γ. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) π *ne possède pas la propriété de trou spectral (TS) ;*

(ii) pour toute $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$, *on a* $\|\pi(\mu)\| = 1$;

(ii)' il existe $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ *fortement adaptée telle que* $\|\pi(\mu)\| = 1$.

Démonstration $(i) \Longrightarrow (ii)$ Supposons π ne possède pas la propriété (TS) ; il existe donc une suite ξ_n dans $\mathcal{H}$ avec $\|\xi_n\| = 1$ telle que

$$\lim_n \|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma.$$

Soit $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$; posons $T = \pi(\mu)$. Alors, par la Proposition 8.2.1, on a

$$\lim_n \|T\xi_n - \xi_n\| = 0.$$

Ceci implique que 1 est une valeur spectrale de T; d'où $1 \leq \|T\|$ (car le rayon spectral de T est $\lim_n \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|$) et donc $\|T\| = 1$ car T est une contraction.

$(ii) \Longrightarrow (ii)'$ est évident (l'ensemble des $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ fortement adaptées n'est pas vide).

$(ii)' \Longrightarrow (i)$ Soit $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ fortement adaptée telle que $\|\pi(\mu)\| = 1$. Alors $\nu := \check{\mu} * \mu$ est adaptée. D'autre part, $T := \pi(\nu)$ est un opérateur auto-adjoint (voir Remarque 8.2.3.iii). De plus,

$$\|T\| = \|\pi(\mu)^* \pi(\mu)\| = \|\pi(\mu)\|^2 = 1.$$

Donc 1 est une valeur spectrale de T. Il est bien connu les valeurs spectrales d'un opérateur auto-adjoint sont des valeurs propres approchées (voir [Rudi73]). Il existe donc une suite $(\xi_n)_n$ dans $\mathcal{H}$ avec $\|\xi_n\| = 1$ telle que

$$\lim_n \|T\xi_n - \xi_n\| = 0.$$

Par la Proposition 8.2.1, on a alors

$$\lim_n \|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| = 0$$

pour tout $\gamma \in \Gamma(\nu) = \Gamma$.■

Le premier corollaire donne une caractérérisation des groupes de Kazhdan par le fait que les opérateurs de Markov associées à des représentations sans vecteur invariant sont de norme < 1.

Corollaire 8.2.5 ***(Propriété (T) et norme d'opérateurs de Markov)*** *Soit* Γ *un groupe dénombrable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Γ *possède la propriété (T) ;*

(ii) pour toute $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ *fortement adaptée, il existe* $\varepsilon = \varepsilon(\mu) > 0$ *tel que, pour toute représentation unitaire* $(\pi, \mathscr{H})$ *avec* $\mathscr{H}^\Gamma = \{0\}$, *on a*

$$\|\pi(\mu)\| \leq 1 - \varepsilon.$$

(ii)' il existe $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ *telle que, pour toute représentation unitaire* $(\pi, \mathscr{H})$ *avec* $\mathscr{H}^\Gamma = \{0\}$, *on a* $\|\pi(\mu)\| < 1$.

Démonstration $(i) \Longrightarrow (ii)$: Supposons, par l'absurde, que l'assertion est fausse pour $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ fortement adaptée. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe une représentation unitaire $(\pi_n, \mathscr{H}_n)$ de Γ avec $\mathscr{H}_n^\Gamma = \{0\}$ et telle que

$$\|\pi_n(\mu)\| \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Considérons la représentation unitaire $\pi := \oplus_n \pi_n$ de Γ sur $\mathscr{H} := \oplus_n \mathscr{H}_n$. Alors

$$\|\pi(\mu)\| = \sup_{n \geq 1} \|\pi_n(\mu)\| = 1.$$

Par la Proposition 8.2.4, π n'a pas donc pas la propriété (TS). Comme Γ

$$\mathscr{H}^\Gamma = \oplus_n \mathscr{H}_n^\Gamma = \{0\},$$

ceci est absurde, car Γ possède la propriété (T).
L'implication $(ii) \Longrightarrow (ii)'$ est évidente.
$(ii)' \Longrightarrow (i)$: soit $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ telle que, pour toute représentation unitaire $(\pi, \mathscr{H})$ avec $\mathscr{H}^\Gamma = \{0\}$, on a $\|\pi(\mu)\| < 1$. L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ de la Proposition 8.2.4 montre alors que chaque telle représentation π possède la propriété (TS). Ceci signifie que Γ possède la propriété (T). ■

Le deuxième corollaire donne une caractérisation de la moyennabilité par le fait les opérateurs de Markov associées à la représentation régulière sont de norme 1.

Corollaire 8.2.6 ***(Théorème de Kesten)*** *Soit* Γ *un groupe dénombrable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Γ *est moyennable ;*

(ii) pour toute $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$, *on a* $\|\pi_\Gamma(\mu)\| = 1$;

(ii)' il existe $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ *fortement adaptée telle que* $\|\pi_\Gamma(\mu)\| = 1$.

Démonstration Par le Theorème 7.2.4), Γ est moyennable si et seulement si la représentation régulière $(\pi_\Gamma, \ell^2(\Gamma))$ de Γ ne possède pas la propriété (TS). Le corollaire est donc une conséquence de la Proposition 8.2.4.■

Remarque 8.2.7 L'implication $(ii)' \Longrightarrow (i)$ du corollaire précédent peut être mise en défaut si μ est supposée seulement adaptée (voir Exercice 8.4.6).

8.3 Marches aléatoires et rayon spectral d'un groupe discret

Soit Γ un groupe de type fini ; fixons une partie génératrice finie S de Γ avec $S^{-1} = S$. Nous introduisons le rayon spectral $\rho = \rho(\Gamma, S)$ associé à la marche aléatoire simple sur le graphe de Cayley déterminé par S.

Définition 8.3.1 (Graphe de Cayley d'un groupe) Le *graphe de Cayley* $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ de Γ, muni de la partie génératrice finie $S = S^{-1}$, est le graphe ainsi défini :
- les sommets de $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ sont les éléments de Γ;
- un couple $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$ est une arête, et on écrit alors $y \sim x$, si et seulement si il existe $s \in S$ tel que $y = xs$;

On considère la marche aléatoire X_n simple sur $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$, avec $X_0 = e$ et la probabilité de transition

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \frac{1}{|S|} \text{ si } y \sim x$$

et $\mathbf{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = 0$ sinon. L'opérateur de Markov $M : \ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$ associé est

$$M = \pi_\Gamma(\mu_S) = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \pi_\Gamma(\delta_s)$$

où μ_S est la mesure uniforme sur S. On observera que, pour tout n,

$$\langle M^n \delta_e, \delta_e \rangle = \mu_S^n(e) = \mathbf{P}(X_n = e | X_0 = e)$$

est la probabilité de retour à l'origine de la marche à l'instant n. Le lemme suivant donne une interprétation probabiliste de la norme de $M = \pi_\Gamma(\mu_S)$.

Lemme 8.3.2 *On a*

$$\boxed{\lim_n \mathbf{P}(X_{2n} = e | X_0 = e)^{1/2n} = \lim_n \mu_S^{2n}(e)^{1/2n} = \|\pi_\Gamma(\mu_S)\|.}$$

Démonstration Comme μ_S est symétrique, on a

$$\|M\|^2 = \|M^*M\| = \|\pi_\Gamma(\check{\mu_S} * \mu_S)\| = \|\pi_\Gamma(\mu_S)^2\| = \|M^2\|$$

et, comme M^2 est auto-adjoint,

$$\|M^2\| = \lim_n \|M^{2n}\|^{1/n}.$$

D'où

$$\|M\|^2 = \sup_{f \in \mathbf{C}[\Gamma]} \left(\limsup_n \langle M^{2n} f, f \rangle^{1/n} \right),$$

où $\mathbf{C}[\Gamma]$ est l'espace vectoriel engendré par $\{\delta_x : x \in \Gamma\}$. On a

$$\limsup_n \langle M^{2n} \sum_{i=1}^k c_i \delta_{x_i}, \sum_{i=1}^k c_i \delta_{x_i} \rangle^{1/2n} \le 2 \max_{i=1}^k \left(\limsup_n \left\langle M^{2n} \delta_{x_i}, \delta_{x_i} \right\rangle^{1/2n} \right),$$

pour tous $x_1, \ldots, x_k \in \Gamma$ et $c_1, \ldots, c_k$ in $\mathbf{C}$. Par ailleurs, pour tout $x \in \Gamma$ et toute mesure de probabilité $\nu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$, on vérifie immédiatement que

$$\langle \pi_\Gamma(\nu) \delta_x, \delta_x \rangle = \langle \pi_\Gamma(\nu) \delta_e \delta_e \rangle = \nu(e).$$

D'où

$$\|M\|^2 \le \max_{i=1}^k \left(\limsup_n \left\langle M^{2n} \delta_{x_i}, \delta_{x_i} \right\rangle^{1/2n} \right) = \limsup_n (\langle \pi_\Gamma(\mu^{2n}) \delta_e, \delta_e \rangle)^{1/2n}.$$

Ceci termine la preuve. ■

Le nombre

$$\rho = \lim_n \mu_S^{2n}(e)^{1/2n} = \|\pi_\Gamma(\mu_S)\|$$

est habituellement appelé le *rayon spectral* de la marche simple associée à S.

Quand Γ n'est pas moyennable, on a $\rho < 1$ et ceci signifie que la probabilité $\mathbf{P}(X_{2n} = e | X_0 = e)$ de retour à l'origine décroît exponentiellement vite quand $n \to +\infty$.

8.3.1 Calcul du rayon spectral pour le groupe libre

Kesten a déterminé dans [Kest59b] la valeur exacte du rayon spectral de la marche simple sur un groupe libre.

Soit $\Gamma = \mathbf{F}_N$ le groupe libre sur N generators $a_1, \ldots, a_N$. Soit μ la mesure de probabilité uniforme sur $\{a_1^{\pm 1}, \ldots, a_N^{\pm 1}\}$:

$$\mu(a_i) = \mu(a_i^{-1}) = \frac{1}{2N} \qquad \text{pour tout} \quad 1 \leq i \leq N.$$

Théorème 8.3.3 ***(Rayon spectral du groupe libre)*** *On a*

$$\boxed{\rho = \|\pi_\Gamma(\mu)\| = \frac{\sqrt{2N-1}}{N}.}$$

Ce résultat découle du résultat plus général suivant sur le rayon spectral de la marche aléatoire simple sur un arbre.

Soit $T = T_d$ l'arbre régulier de degré $d \geq 2$ (chaque sommet a donc d voisins et il n'y a pas de boucle).

On considère la marche aléatoire simple sur les sommets de T, avec probabilité $1/d$ d'aller d'un sommet vers un de ses d voisins. Soit $M : \ell^2(T) \to \ell^2(T)$ l'opérateur de Markov associé, qui est défini par

$$Mf(v) = \frac{1}{d} \sum_{w \sim v} f(w), \qquad \text{pour tout} \quad f \in \ell^2(T), v \in T$$

où la somme porte sur les sommets w qui sont voisins de v. (Remarquons que le graphe de Cayley $\mathrm{Cay}(\mathbf{F}_N, \{a_1^{\pm 1}, \ldots, a_N^{\pm 1}\})$ est l'arbre régulier T_{2N} de degré 2N et que M s'identifie à $\pi_{\mathbf{F}_N}(\mu)$).

Théorème 8.3.4 ***(Rayon spectral de la marche simple sur un arbre)*** *On a*

$$\boxed{\|M\| = \frac{2\sqrt{d-1}}{d}.}$$

Démonstration Comme M est auto-adjoint, on a (voir [Rudi73]) :

$$\|M\| = \sup\left\{|\langle Mf, f\rangle| \ : \ f \in \ell^2(T), \|f\|_2 = 1\right\}.$$

Comme $|\langle Mf, f\rangle| \leq \langle M|f|, |f|\rangle$ et que $\|f\|_2 = \||f|\|_2$, on a

$$\|M\| = \sup\left\{\langle Mf, f\rangle \ : \ f \in \ell^2(T), f \geq 0, \|f\|_2 = 1\right\}.$$

Fixons une origine $o \in \mathrm{T}$ et notons $\delta : \mathrm{T} \to \mathbf{N}$ la distance à l'origine : $\delta(v)$ est la longueur du plus court chemin de o à $v \in \mathrm{T}$.

Observons que tout sommet $v \neq o$ possède $d-1$ “descendants", c-à-d des voisins w avec $\delta(w) = \delta(v)+1$ et un unique “ancêtre", c-à-d un voisin w, noté $w(v)$, avec $\delta(w) = \delta(v)-1$; l'origine o possède d voisins qui sont tous des “descendants."

Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{T})$ avec $f \geq 0$ et $\|f\|_2 = 1$. Alors

$$\begin{aligned} d\langle \mathrm{M}f, f\rangle &= \sum_{v\in \mathrm{T}} \left(\sum_{w\sim v} f(v)f(w)\right)\\ &= \sum_{w:\delta(w)=1} f(o)f(w) + \sum_{v\neq o}\left(\sum_{w:\delta(w)=\delta(v)+1} f(v)f(w)\right) + \sum_{v\neq o} f(v)f(w(v))\\ &= 2\sum_{v\in \mathrm{T}}\left(\sum_{w:\delta(w)=\delta(v)+1} f(v)f(w)\right) \end{aligned}$$

Pour $v, w \in \mathrm{T}$ avec $\delta(w) = \delta(v)+1$, on applique l'inégalité

$$f(v)f(w) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{d-1}} f(v)^2 + \sqrt{d-1} f(w)^2\right).$$

et on obtient ainsi

$$\begin{aligned} d\langle \mathrm{M}f, f\rangle &\leq \sum_{v\neq o}\left(\frac{d-1}{\sqrt{d-1}} f(v)^2 + \sqrt{d-1} f(v)^2\right) + \frac{d}{\sqrt{d-1}} f(o)^2\\ &\leq \sqrt{d-1}\sum_{v\in \mathrm{T}} 2f(v)^2 = 2\sqrt{d-1}. \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\|\mathrm{M}\| \leq \frac{2\sqrt{d-1}}{d}.$$

Pour établir l'inégalité dans l'autre sens, soit $\lambda_n < 1$ une suite croissante de nombres réels avec $\lim_n \lambda_n = 1$. Soit f_n la fonction radiale sur T définie par

$$f_n(v) = \left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{d-1}}\right)^m \text{ si } \delta(v) = m.$$

Alors, on calcule que

$$\|f_n\|_2^2 = 1 + \sum_{m\geq 1}\left(d(d-1)^{m-1}\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{d-1}}\right)^{2m}\right) = 1 + \frac{d}{d-1}\left(\frac{\lambda_n^2}{1-\lambda_n^2}\right)$$

et que

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{M} f_n, f_n\rangle &= \frac{2}{d}\sum_{m\geq 0}\left(d(d-1)^{m-1}(d-1)\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{d-1}}\right)^{m+1}\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{d-1}}\right)^{m}\right)\\ &= \frac{2}{\sqrt{d-1}}\left(\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n^2}\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_n \frac{\langle \mathrm{M} f_n, f_n\rangle}{\|f_n\|_2^2} = \frac{2\sqrt{d-1}}{d}$$

et donc $\|\mathrm{M}\| = \dfrac{2\sqrt{d-1}}{d}$.$\blacksquare$

Remarque 8.3.5 (i) Une analyse plus poussée montre qu'en fait le spectre de l'opérateur de Markov M comme plus haut est l'intervalle $\left[-\dfrac{2\sqrt{d-1}}{d}, \dfrac{2\sqrt{d-1}}{d}\right]$ (voir [Kest59b]).
(ii) Soit Γ un groupe engendré par $\mathrm{N} \geq 2$ elements $a_1, \ldots, a_\mathrm{N}$. Soit ρ le rayon spectral de la marche aléatoire simple sur Γ définie par la distribution uniforme sur $\{a_1^{\pm 1}, \ldots, a_\mathrm{N}^{\pm 1}\}$. Alors, comme Γ est un quotient de $\mathbf{F}_\mathrm{N}$, il découle du Théorème 8.3.3 que (voir Exercice 8.4.3)

$$\rho \geq \frac{\sqrt{2\mathrm{N}-1}}{\mathrm{N}}.$$

D'autre part, un résultat remarquable de Kesten (voir [Kest59b]) montre que, si on a égalité $\rho = \frac{\sqrt{2\mathrm{N}-1}}{\mathrm{N}}$, alors Γ est le groupe libre sur $a_1, \ldots, a_\mathrm{N}$.

8.4 Exercices

Exercice 8.4.1 (Mesures fortement adaptées) Soit Γ un groupe dénombrable et $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ une mesure de probabilité sur Γ.
(i) Montrer que μ est fortement adaptée si et seulement si le support $\mathrm{supp}(\mu)$ de μ n'est pas contenu dans la classe à gauche (ou à droite) d'un sous-groupe propre de Γ.
(ii) On suppose que $e \in \mathrm{supp}(\mu)$ et que μ est adaptée. Montrer que μ est fortement adaptée.

Exercice 8.4.2 (Opérateurs de Markov et convolution) Soient Γ un groupe dénombrable et $\mu, \nu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$. Montrer que

$$\pi(\mu * \nu) = \pi(\mu)\pi(\nu) \qquad \text{et} \qquad \pi(\check{\mu}) = \pi(\mu)^*.$$

Exercice 8.4.3 (Rayon spectral d'une marche-quotient) Soient Γ un groupe discret de type fini et $S = S^{-1}$ une partie génératrice finie de Γ. Soient N un sous-groupe distingué, $\overline{G} = \Gamma/N$ le groupe quotient et $p : \Gamma \to \overline{G}$ l'homomorphisme canonique. Alors $\overline{S} = p(S)$ est une partie génératrice (finie) de $\overline{\Gamma}$. Soient ρ_S et $\rho_{\overline{S}}$ les rayons spectraux des marches aléatoires X_n et $\overline{X_n} = p(X_n)$ simples sur $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ et $\mathrm{Cay}(\overline{\Gamma}, \overline{S})$. Montrer que

$$\rho_S \leq \rho_{\overline{S}}.$$

[*Indication :* Se rappeller que $\rho_S = \lim_n \mathbf{P}(X_{2n} = e | X_0 = e)^{1/2n}$. D'autre part, pour tout n, on a

$$\mathbf{P}(X_n = e|X_0 = e) \leq \mathbf{P}(X_n \in N|X_0 = e) = \mathbf{P}(\overline{X_n} = \overline{e}|\overline{X_0} = \overline{e}).]$$

Exercice 8.4.4 (Norme d'une action de Bernoulli) Soit Γ un groupe dénombrable infini et $\Gamma \curvearrowright X$ son action de Bernoulli sur $X = \{0,1\}^\Gamma$. Soit $(\pi_X, L^2_0(X))$ la représentation de Koopman associée.

Montrer que, pour toute $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$, on a

$$\|\pi_X(\mu)\| \leq \|\pi_\Gamma(\mu)\|.$$

[*Indication :* Considérer $X = \{0,1\}^\Gamma$ comme le groupe abélien compact $A = \prod_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (voir Exemple 2.3.12) et Γ comme groupe d'automorphismes de A ; écrire une décomposition $L^2(X) \cong \oplus_{\mathcal{O}} \ell^2(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ parcourt l'ensemble des Γ-orbites dans $\widehat{A}$.]

Exercice 8.4.5 (Un opérateur de Markov de norme 1 sur le groupe libre) Soit $\Gamma = \mathbf{F}_2$ le groupe libre sur les 2 générateurs a et b. Soit $\mu = \dfrac{1}{2}(\delta_a + \delta_b) \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$, qui est une mesure de probabilité adaptée sur Γ.On va montrer que $\|\pi_\Gamma(\mu)\| = 1$, bien que Γ est non moyennable (et donc π_Γ possède la propriété (TS)).
(i) Soit $\nu = \delta_{a^{-1}} * \mu$. Montrer que $\|\pi_\Gamma(\nu)\| = 1$.
(ii) Montrer que $\|\pi_\Gamma(\mu)\| = \|\pi_\Gamma(\nu)\|$ et donc $\|\pi_\Gamma(\mu)\| = 1$.

Exercice 8.4.6 (Comparaison de normes d'opérateurs de Markov avec le rayon spectral) Soient Γ un groupe dénombrable discret et $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$. Soient $\Gamma \curvearrowright X$ une action sur l'espace mesuré (X, m) et $(\pi_X, L^2(X, m))$ la représentation de Koopman associée.

(i) Soit $\xi \in L^2(X)$ avec $\xi \geq 0$ et $\|\xi\| = 1$ Montrer, que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\langle \pi_X(\mu)^n \xi, \xi \rangle \geq \mu^n(e).$$

(ii) En utilisant la formule du rayon spectral (Lemme 8.3.2), en déduire que

$$\|\pi_X(\mu)\| \geq \|\pi_\Gamma(\mu)\|.$$

Bibliographie

[BHV08] B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette, Kazhdan's Property (T), Cambridge University Press 2008.

[BeMa00] B. Bekka et M. Mayer, Ergodic and Topological Dynamics of Group Actions on Homogeneous Spaces, Cambridge University Press, 2000.

[Benoi08] Y. Benoist, Réseaux des groupes de Lie, Cours de M2, Université Paris 6, 2007-2008.

[DuRS93] W. Duke, Z. Rudnick et P. Sarnak, Density of integer points on affine homogeneous varieties, Duke Math. J. 71 (1993), 143–179.

[EsMM93] A. Eskin et C. McMullen, Mixing, counting, and equidistribution in Lie groups, Duke Math. J. 71 (1993), no. 1, 181–209.

[Eyma72] P. Eymard, Moyennes Invariantes et Représentations Unitaires, Lecture Notes in Mathematics 300, Springer 1972.

[Foel55] E. Følner, On groups with full Banach mean value, Math. Scand.3 (1955), 243–254.

[Foll95] G.B. Folland, A Course in Abstract Harmonic Analysis, CRC Press, 1995.

[GoNe10] A. Gorodnik and A. Nevo, The Ergodic Theory of Lattice Subgroups, Annals of Mathematics Studies 172, Princeton University Press 2010.

[Gree69] F. P. Greenleaf, Amenable actions of locally compact groups, Journal of Functional Analysis 4 (1969), 295–315.

[HeRo63] E. Hewitt and K.A. Ross, Abstract Harmonic Analysis II, Springer, 1970.

[HoMo79] R. Howe and C. C. Moore, Asymptotic properties of unitary representations, J. Funct. Anal. 32 (1979), 72–96.

[HoTa92] R. Howe and E.C. Tan, Non-Abelian Harmonic Analysis, Springer 1992.

[Hula66] A. Hulanicki, Means and Følner condition on locally compact groups, Studia Math. 27 (1966), 87–104

[Kazh67] D. Kazhdan, Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, Funct. Anal. Appl. 1 (1967), 63–65.

[Kest59a] H. Kesten, Full Banach mean value on countable groups, Math. Scand. 7 (1959), 146–156.

[Kest59b] H. Kesten, Symmetric random walks on groups, Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959), 336–354.

[Lubo94] A. Lubotzky, Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures, Birkhäuser 1994.

[Mack76] G.W. Mackey, The Theory of Unitary Group Representations, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press 1976.

[Reit65] H. Reiter, On some properties of locally compact groups, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 27 (1965), 697–701.

[Rudi73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw Hil, 1973.

[Sarn90] P. Sarnak, Some Applications of Modular Forms, Cambridge University Press, 1990.

[Walte82] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer, 1982.

[Woes00] W. Woess, Random Walks on Infinite Graphs and Groups, Cambridge University Press, 2000.

[Zimm84] R.J. Zimmer, Ergodic Theory and Semisimple Groups, Birkhäuser, 1984.