**Université de Rennes 1**
**Année 2021/2022**

**Agrégation–Préparation à l'écrit-TD2**

**1** - On considère la forme quadratique $q$ sur $\mathbf{R}^4$ l donnée par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2xz + 4yt.$$

(i) Déterminer la forme bilinéaire symétrique $f$ associée à $q$ ainsi que sa matrice dans la base canonique.
(ii) Déterminer le rang de $f$.
(iii) Déterminer une base de $\mathbf{R}^4$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.
(iv) Déterminer la signature de $f$.

**2** - On considère dans $O(3)$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base orthonormée $B$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de la transformation $M$ dans $B$ soit de la forme $M = \text{Diag}(1, R_\theta)$. Ecrire $M$ comme produit de réflexions et comme produit de retournements.

**3** - Soient $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ et $S^{n-1}$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$.
(i) Montrer que l'action naturelle de $SO(n)$ sur $S^{n-1}$ est transitive.
(ii) Montrer que l'action naturelle de $SO(n)$ sur $S^{n-1}$ est doublement transitive : pour tous $x, y, x', y' \in S^{n-1}$ tels que $\|x - y\| = \|x' - y'\|$, il existe $A \in SO(n)$ tel que $Ax = x'$ et $Ay = y'$.
(iii) Soient $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ une application préservant les distances. Montrer que se prolonge en une transformation orthogonale de $O(n)$.

**4** - Pour $n \geq 2$, soit $H$ un hyperplan dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Soit $s_H$ la réflexion correspondante et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $H^\perp = \mathbb{R}y$. Montrer que

$$s(x) = x - 2\frac{\langle x|y\rangle}{\|y\|^2}y, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**5** - Pour $n \geq 2$, soit $A \in O(n)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $A$ est une symétrie orthogonale (c-à-d il existe un sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbf{R}^n$ tel que $A(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, où $p_F$ et $p_{F^\perp}$ dénotent les projections orthogonales sur $F$ et $F^\perp$.)

(ii) $A$ est une involution, c-à-d $A^2 = I_n$.

**6** - Pour $n \geq 2$, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
(i) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$ et $\|x\| = \|y\| \neq 0$ Montrer qu'il existe une unique réflexion $s_H$ telle que $s_H(x) = y$. Décrire géométriquement l'hyperplan $H$.
(ii) Soit $A \in O(n)$. Montrer qu'il existe une réflexion $s_H$ telle que $s_H A$ possède un point fixe différent de 0.
(iii) Soit $A \in O(n)$. Déduire de (ii), en procédant par récurrence sur $n$, que $A$ est produit d'au plus $n$ réflexions.