Université de Rennes 1
Année 2021/2022

Préparation à l'agrégation

Séries de Fourier-Feuille d'exercices

Exercice 1 (Calculs) (i) Développez en série de Fourier les fonctions 2π-périodiques suivantes définies come suit sur l'intervalle $[-\pi,\pi[$:

1. la function impaire égale à 1 sur $[0,\pi[$
2. la fonction paire égale à x sur $[0,\pi[$
3. la fonction
$$f(x) = \begin{cases} -\ \frac{\pi+x}{2} & \text{pour} \quad -\pi \leq x < 0 \\ \quad\ \frac{\pi-x}{2} & \text{pour} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$
4. la fonction
$$f(x) = \begin{cases} \quad 1 & \text{pour} \quad -\pi \leq x < 0 \\ -\ 2 & \text{pour} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$
5. la fonction
$$f(x) = \begin{cases} x(\pi+x) & \text{pour} \quad -\pi \leq x < 0 \\ x(\pi-x) & \text{pour} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$
6. la fonction
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & \text{pour} \quad |x| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |x| >= 1/2 \end{cases}$$

(ii) En déduire les sommes des séries $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 2 (Principe de localisation) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ localement intégrable et 2π-périodique. On suppose que f est nulle sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$. Montrer que la série de Fourier de f converge vers 0 en tout point de I. Conclure que la convergence de la série de Fourier d'une fonction f en un point x_0 donné ne dépend que des valeurs de f au voisinage de x_0.

Exercice 3 (Inégalité de Wirtinger) (i) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. Montrer qu'on a
$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt - \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2dt.$$

(ii) Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $\|f\|_{L^2} \leq \frac{b-a}{\pi}\|f'\|_{L^2}$.

Exercice 4 (Exemple d'une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ localement intégrable et 2π-périodique telle que

$$c_0(f) = 0, \quad c_n(f) = \frac{a_n}{2i} \qquad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{-a_n}{2i}, \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Soit $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(i) Montrer que F est continue et 2π-périodique

(ii) Montrer que $c_{|n|}(F) = \frac{-a_{|n|}}{2|n|}$ pour $|n| \geq 1$. En déduire que la série converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

(iii) Montrer que la série trigonométrique définie S par $S(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{\log n}$ est partout convergente sur $\mathbf{R}$.

(iv) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ localement intégrable et 2π-périodique telle que la série de Fourier $S(f)$ de f coincide avec S sur $\mathbf{R}$.

Exercice 5 (Idéaux dans $L^1(\mathbf{S}^1)$) On rappelle que $L^1(\mathbf{S}^1)$ est l'algèbre de Banach formée des fonctions 2π-périodiques $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ qui sont intégrables sur $[-\pi, \pi]$, pour le produit de convolution défini par

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

Pour $n \in \mathbf{Z}$, on note $e_n \in L^1(\mathbf{S}^1)$ définie par $e_n(x) = e^{inx}$.
(i) Soit $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et soit $n \in \mathbf{Z}$. Donner une expression simple pour $f * e_n$.
(ii) Soit E une partie de $\mathbf{Z}$. On pose

$$I_E := \{f \in L^1(\mathbf{S}^1) \mid \forall n \in E : c_n(f) = 0\}.$$

Montrer que I_E est un idéal fermé de $L^1(\mathbf{S}^1)$.

Soit I un idéal fermé de $L^1(\mathbf{S}^1)$. On pose $E := \{n \in \mathbf{Z} \mid \forall f \in I : c_n(f) = 0\}$.
(iii) Montrer que $I \subset I_E$.
(iv) Soit $n \in \mathbf{Z} \setminus E$. Montrer que $e_n \in I$.
[Indication : utiliser (i)]
(v) Déduire de (iv) que $I_E \subset I$ et que donc $I = I_E$.
[Indication : on pourra utiliser le théorème de Féjer]
(vi) Conclure que l'application $E \mapsto I_E$ est une bijection entre l'ensemble des parties E de $\mathbf{Z}$ et l'ensemble des idéaux fermés de $L^1(\mathbf{S}^1)$.