Université de Rennes 1
Année 2011/2012

Licence 3

Espaces vectoriels normés–Feuille de TD 7

Exercice 1 (Construction d'une base hilbertienne de $L^2(X \times X)$) Soit X un intervalle de $\mathbf{R}$ muni de la mesure de Lebesgue μ. Soit $(f_n)_n$ une base hilbertienne de $L^2(X, \mu)$. Pour tout $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, on définit $f_m \otimes f_n : X \times X \to \mathbf{C}$ par $f_m \otimes f_n(x, y) = f_m(x)f_n(y)$ pour $(x, y) \in X \times X$.
(i) Montrer que $(f_m \otimes f_n)_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ est une famille orthonormée dans l'espace de Hilbert $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.
(ii) Montrer que $(f_m \otimes f_n)_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.
Indication: Soit $F \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ tel que $\langle F|f_m \otimes f_n\rangle = 0$ pour tout $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Considérer, pour tout n, la fonction sur X définie par $F_n(x) = \int_X F(x, y)\overline{f}_n(y)d\mu(y)$.

Exercice 2 (Opérateurs diagonaux) Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbf{K}$ et soit $T : \ell^2 \to \ell^2$ l'application linéaire définie par $T((x_n)_n) = (a_nx_n)_n$ pour tout $(x_n)_n \in \ell^2$.
(i) Montrer que $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ si et seulement si $(a_n)_n$ est bornée.
(ii) On suppose que $(a_n)_n$ est bornée. Montrer que T est normal.
(iii) Montrer que T est compact si et seulement si $\lim_n a_n = 0$.

Exercice 3 (Compacité d'un opérateur intégral sur $C[0, 1]$) On munit $C[0, 1]$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Soit $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{K}$ une fonction continue et soit $K : C[0, 1] \to C[0, 1]$ l'opérateur intégral défini par $Kf(s) = \int_0^1 k(s, t)f(t)dt$ pour $f \in C[0, 1]$ (voir TD 1, Exercice 11)
(i) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $C[0, 1]$ avec $\|f_n\|_\infty \leq 1$. Montrer que la suite $(Kf_n)_n$ est équicontinue.
(ii) Montrer que $K : C[0, 1] \to C[0, 1]$ est un opérateur compact.

Exercice 4 (Un exemple de diagonalisation d'un opérateur compact) Soit $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ la fonction définie par $k(x, y) = \min(x, y)$. Soit K l'opérateur intégral associé sur l'espace de Hilbert réel $L^2_{\mathbf{R}}([0, 1])$:

$$Kf(x) = \int_0^1 \min(x, y)f(y)dy = \int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 f(y)dy$$

pour tous $f \in L^2_{\mathbf{R}}([0,1]), x \in [0,1]$.
(i) Vérifier que K est compact et symétrique.

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une valeur propre non nulle de K et $f \in L^2_{\mathbf{R}}([0,1])$ une fonction propre associée.
(ii) Montrer que f est presque partout égal à une fonction F de classe C^2 satisfaisant à l'équation différentielle $\lambda F'' + F = 0$ avec les conditions $F(0) = F'(1) = 0$.
(iii) Déduire de (i) que l'ensemble des valeurs propres de K est $\left\{ \dfrac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \ : \ n \in \mathbf{N} \right\}$ et que l'espace propre associée à $\dfrac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$ est engendré par la fonction $f_n(x) = \sqrt{2}\sin((2n+1)\pi x/2)$.
(iv) Calculer $\|k\|^2_{L^2([0,1]\times[0,1])}$.
(v) Déduire de ce qui précède que $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$ et ensuite que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

Exercice 5 (Opérateur de Volterra) Soit $V \in \mathcal{B}(L^2[0,1])$ l'opérateur de Volterra défini par $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour tous $f \in L^2[0,1]$ et $x \in [0,1]$.
(i) Montrer que V est compact.
(ii) Déterminer V^*.
(iii) Montrer que $\lim_n \|V^n\|^{1/n} = 0$
Indication: procéder comme dans TD 2, Exercice 9.
(iv) Montrer que V n'a pas de valeur propre.