Université de Rennes 1
Année 2011/2012

Licence 3

Espaces vectoriels normés–Feuille de TD 2

Dans toute la suite, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Exercice 1 (Caractérisation géométrique d'une norme) Soit E un espace vectoriel et $N : E \to [0, +\infty[$ une fonction avec les propriétés (N1) et (N2) du cours. Montrer que N est une norme sur E si et seulement si l'ensemble $\{x \in E \ : \ N(x) \leq 1\}$ ou bien l'ensemble $\{x \in E \ : \ N(x) < 1\}$ est convexe.

Exercice 2 (Relation de commutation) Soit E un espace vectoriel normé avec $E \neq 0$. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{B}(E)$, on a $AB - BA \neq I$, où $I = \mathrm{Id}_E$ est l'identité sur E.
Indication: Par contradiction, supposons que $AB - BA = I$. Montrer, par récurrence, que $AB^n - B^n A = nB^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3 (Non-continuité de l'opérateur de dérivation) On considère $C[0, 1]$ et $C^1[0, 1]$ munis de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty$. Soit $T : C^1[0, 1] \to C[0, 1], f \mapsto f'$, l'opérateur de différentiation Montrer que T n'est pas continu.

Exercice 4 (Existence de formes linéaires non continues) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension infinie. Montrer qu'il existe une forme linéaire $\varphi : E \mapsto \mathbf{K}$ qui n'est pas continue.
Indication: Définir φ au moyen d'une base de E.

Exercice 5 (Existence de normes non équivalentes) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension infinie. Montrer qu'il existe deux normes non équivalentes sur E.
Indication: Considérer une base $\{e_i \ : \ i \in I\}$ de E et définir des analogues des normes $\| \cdot \|_\infty$ et $\| \cdot \|_1$

Exercice 6 (Séries à valeurs dans un espace normé) Soit E un espace vectoriel normé . Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite éléments de E. On dit que la série de terme général x_n converge dans E si la suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $s_n = x_0 + x_1 \cdots + x_n$ est convergente dans E. On note alors $\sum_{n=0}^\infty x_n$ sa limite.

On dit que la série de terme général x_n est *normalement convergente* si la série de terme général $\|x_n\|$ est convergente dans $\mathbf{R}$.
(i) Supposons que la série de terme général x_n soit normalement convergente. Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy.
(ii) On suppose que E est complet et que la série de terme général x_n est normalement convergente. Montrer que la série de terme général x_n converge et que

$$\| \sum_{n=0}^\infty x_n \| \leq \sum_{n=0}^\infty \|x_n\|.$$

(iii) On suppose que toute série dans E qui est normalement convergente est convergente. Montrer que E est complet.
(iv) On suppose que E est complet et que $\limsup_n \|x_n\|^{1/n} < 1$. Montrer que la série de terme général x_n converge dans E.

Exercice 7 (Suites sous-additives) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *sous-additive:* $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ pour tous n, m.

Montrer que la suite $(\frac{a_n}{n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $a := \inf_{n\in\mathbf{N}} \frac{a_n}{n}$, en convenant que $\inf_{n\in\mathbf{N}} \frac{a_n}{n} = -\infty$ si $(\frac{a_n}{n})_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas minorée.

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel normé et soit $T \in \mathcal{B}(E)$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $T^n := T \circ \cdots \circ T$ (n fois), avec la convention $T^0 := I$.
(i) Soit $\alpha_n = \|T^n\|$. Montrer que $\alpha_{n+m} \leq \alpha_n \alpha_m$ pour tous n, m.
(ii) Déduire de (i) et de l'exercice 7 que $\lim_n \|T^n\|^{1/n}$ existe et que l'on a

$$\lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbf{N}} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|.$$

Exercice 9 (Séries géométriques dans $\mathcal{B}(E)$) Soit E un espace de Banach et soit $T \in \mathcal{B}(E)$.
(i) Montrer que la série de terme général T^n converge dans $\mathcal{B}(E)$ si et seulement si $\lim_n \|T^n\|^{1/n} < 1$.
Indication: Appliquer les Exercices 6 et 8.
(ii) On suppose que $\lim_n \|T^n\|^{1/n} < 1$. Vérifier que $I - T$ est inversible dans $\mathcal{B}(E)$ et que $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.
(iii) On suppose que $\|T\| < 1$. Montrer $I - T$ est inversible dans $\mathcal{B}(E)$ et qu'on a l'inégalité

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Exercice 10 (L'opérateur de Volterra) Pour $a < b$, soient $\Delta = \{(s,t) \in [a,b]^2 \ : \ t \leq s\}$ et $k : \Delta \to \mathbf{K}$ une fonction continue. On munit $C[a,b]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On définit l'*opérateur de Volterra* $V : C[a,b] \to C[a,b]$ par

$$Vf(s) = \int_a^s k(s,t) f(t) dt \qquad \text{pour tout} \quad f \in C[a,b].$$

On pose $\alpha := \max_{(s,t)\in\Delta} |k(s,t)|$.
(i) Vérifier que $V \in \mathcal{B}(C[a,b])$ et que $\|V\| \leq \alpha(b-a)$.
(ii) Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $s \in [a,b]$, on a

$$|V^n f(s)| \leq \alpha^n \|f\|_\infty \frac{(s-a)^n}{n!}.$$

(iii) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\|V^n\| \leq \alpha^n \dfrac{(b-a)^n}{n!}$.
(iv) Montrer $I - V$ est inversible dans $\mathcal{B}(E)$ et déterminer $(I-V)^{-1}$.
Indication: Appliquer l'Exercice 9.