Université de Rennes 1
Année 2011/2012

Licence 3

Espaces vectoriels normés–Feuille de TD 1

Exercice 1 (Complétude d'espaces d'applications bornées) Soient T un ensemble et (X, d) un espace métrique complet. Soit $\ell^\infty(T, X)$ l'ensemble des applications bornées $f : T \to X$, muni de la distance $d_\infty(f, g) = \sup_{t\in T} d(f(t), g(t))$. Montrer que $(\ell^\infty(T, X), d_\infty)$ est complet.

Exercice 2 (Complétude d'espaces d'applications continues) Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On suppose que X est compact et que Y est complet. Soit $C(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs dans Y.
(i) Soient $f, g \in C(X, Y)$. Montrer que, pour $\sup_{x\in X} \delta(f(x), g(x)) < \infty$.
(ii) On munit $C(X, Y)$ de la distance $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} \delta(f(x), g(x))$. Montrer que $(C(X, Y), d_\infty)$ est complet.

Exercice 3 (Adhérences et intérieurs de boules d'espaces normés) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour $x \in E$ et $r > 0$, soit $B(x, r)$ (respectivement $\overline{B}(x, r)$) la boule ouverte (respectivement fermée) de centre x et de rayon r.
(i) Montrer que $\overline{B}(x, r)$ est l'adhérence de $B(x, r)$.
(ii) Montrer que $B(x, r)$ est l'intérieur de $\overline{B}(x, r)$.
(iii) Donner un exemple d'espace métrique (E, d) pour lequel les enoncés (i) et (ii) sont faux.

Exercice 4 (Normes équivalentes sur $\mathbf{K}^n$) Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Montrer que les normes $x \mapsto \|x\|_\infty$, $x \mapsto \|x\|_1$ et $x \mapsto \|x\|_2$ sur $\mathbf{K}^n$ sont mutuellement équivalentes.

Exercice 5 (Adhérence d'un sous-espace vectoriel) Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F dans E est un sous-espace vectoriel.

Exercice 6 (Espaces d'applications continues à valeurs dans un espace de Banach) Soient K un espace métrique compact et $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. L'ensemble $C(K, E)$ des applications continues $f : K \to E$ est un espace vectoriel pour les lois: $(f+g)(t) := f(t)+g(t)$ et $(\lambda f)(t) := \lambda f(t)$ pour $f, g \in C(K, E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Montrer que

$$f \mapsto \|f\|_\infty := \sup_{t\in K} \|f(t)\| \qquad \forall f \in C(K, E)$$

est une norme sur $C(K,E)$ et que $(C(K,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 7 (Normes non équivalentes sur $C[0,1]$) Soit $C_{\mathbf{K}}[0,1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbf{K}$, où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
(i) Montrer que

$$f \mapsto \|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt \qquad \forall f \in C_{\mathbf{K}}[0,1]$$

est une norme sur $C_{\mathbf{K}}[0,1]$.
(ii) Montrer que $(C_{\mathbf{K}}[0,1], \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Exercice 8 (Espaces de fonctions hölderiennes) Soit $\alpha \in]0,1]$. Soit $C^\alpha[0,1]$ l'espace vectoriel des fonctions α-hölderiennes $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ c-à-d telles qu'il existe $C = C(f) > 0$ avec $|f(t) - f(s)| \leq C|t-s|^\alpha$ pour tous $s,t \in [0,1]$. Montrer que $C^\alpha[0,1]$, muni de la norme

$$f \mapsto \|f\|_\infty + \sup_{t \neq s} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha},$$

est un espace de Banach.

Exercice 9 (Normes de matrices) Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbf{K})$, vue comme application linéaire $\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$.
(i) On munit $\mathbf{K}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la norme associée de A est $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
(ii) On munit $\mathbf{K}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que la norme associée de A est $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.
(iii) On munit $\mathbf{K}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Montrer, pour que la norme associée de A, on a $\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.
(iv) A-t-on égalité dans (iii)?

Exercice 10 (Norme d'un opérateur intégral) Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{K}$ une fonction continue. Pour tout $f \in C_{\mathbf{K}}[0,1]$, on définit $Kf : [0,1] \to \mathbf{K}$ par $Kf(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt$.
(i) Montrer que $Kf \in C_{\mathbf{K}}[0,1]$, pour tout $f \in C_{\mathbf{K}}[0,1]$.
(ii)* On munit $C_{\mathbf{K}}[0,1]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'application

$$K : C_{\mathbf{K}}[0,1] \to C_{\mathbf{K}}[0,1], f \mapsto Kf$$

est linéaire et continue et que $\|K\| = \max_{0 \leq s \leq 1} \int_0^1 |k(s,t)|dt$.