PSIN/PRB – Corrigé du CC2 du 26/11/2019

Exercice 1 (4P.) Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On rappelle l'inégalité de Tchebychev : pour tout $a > 0$, on a $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) \leq \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$.
(i) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et possèdant une variance. On pose $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \geq 1$. Soit $a > 0$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \mathbf{E}(X_1)\right| \geq a\right) \leq \dfrac{\mathrm{Var}(X_1)}{na^2}$.
Solution : Comme les X_i sont de même loi que X_1, on $\mathbf{E}(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n}\mathbf{E}(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(X_1)$; comme les X_i sont indépendantes et de même loi que X_1, on a $\mathrm{Var}(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)) = \frac{1}{n^2}(n\mathrm{Var}(X_1)) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1)$. En appliquant l'inégalité de Tchebychev à la v.a.r $X := \frac{1}{n}S_n$, on obtient donc $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - \mathbf{E}(X_1)\right| \geq a\right) \leq \dfrac{\mathrm{Var}(X_1)}{na^2}.}$
(ii) On suppose que les v.a.r X_n en (i) suivent une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ pour $p \in]0,1[$. Montrer $\mathbf{P}\left(|S_n - np| \geq 5\sqrt{n}\right) \leq \dfrac{1}{100}$.
Solution : On a, par hypothèse, $\mathbf{E}(X_1) = p$ et $\mathrm{Var}(X_1) = p(1-p)$. D'autre part, $\{|S_n - np| \geq 5\sqrt{n}\} = \left\{\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \geq \dfrac{5}{\sqrt{n}}\right\}$. Il s'ensuit avec (i) que $\mathbf{P}\left(|S_n - np| \geq 5\sqrt{n}\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \geq \dfrac{5}{\sqrt{n}}\right) \leq \dfrac{p(1-p)n}{25n} = \dfrac{p(1-p)}{25}$. Comme $p(1-p) \leq 1/4$ pour tout $p \in [0,1]$, l'assertion s'ensuit.

Exercice 2 (9P.) Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbf{N}$. Soit $p \in]0,1[$ fixé. On suppose, pour tout $(k,n) \in \mathbf{N}^2$, on a : $\mathbf{P}(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n, \end{cases}$
pour un certain $a \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer la valeur de a. (On rappelle que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.)
Solution : Comme $\Omega = \bigcup_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}\{X = k, Y = n\}$ est une partition en une famille dénombrable d'ensembles, on a $\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty \mathbf{P}(X = k, Y = n) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$ et donc, avec $q = 1-p$, $1 = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^n pq^n = \sum_{n=0}^\infty a^n pq^n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\right) = \sum_{n=0}^\infty a^n pq^n 2^n = p\sum_{n=0}^\infty (2aq)^n$. Ceci implique que $|2aq| < 1$ et que $1 = \dfrac{p}{1-2aq}$, c-à-d $p = 1 - 2apq$, c-à-d $\boxed{a = 1/2}$.
(ii) Déterminer la loi de Y.
Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $\{Y = n\} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}}\{X = k, Y = n\}$ est une partition en une famille dénombrable d'ensembles, on a $\mathbf{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{P}(X = k, Y = n) =$

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}pq^n = \frac{pq^n}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = pq^n.$; en conclusion, $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{Y}=n)=pq^n.}$

(iii) Déterminer la loi de X, en utilisant (sans preuve) l'égalité $\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ pour tout $k \geq 0$ et tout $x \in]-1,1[$.

Solution : Soit $k \in \mathbf{N}$. Comme $\{\mathrm{X}=k\} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}\{\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=n\}$ est une partition en une famille dénombrable d'ensembles, on a

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}=k) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(\mathrm{X}=k,\mathrm{Y}=n) = p\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}(\frac{q}{2})^n = (p\frac{q}{2})^k\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}(\frac{q}{2})^{n-k}.$$

Comme $q/2 \in [0,1]$, il s'ensuit, avec la formule indiquée, que

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}=k) = p\frac{1}{(1-(q/2))^{k+1}} = p(q/2)^k\frac{p}{(1-(q/2))^{k+1}} = p(q/2)^k(\frac{p}{(2-q})^{k+1} = (1-\frac{q}{2-q})(\frac{q}{2-q})^k;$$

en conclusion, $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{X}=k) = (1-\frac{q}{2-q})(\frac{q}{2-q})^k.}$

(iv) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Solution : Par exemple, pour $n=0$ et $k=1$, on a $\mathbf{P}(\mathrm{Y}=0) = p \neq 0$, $\mathbf{P}(\mathrm{X}=1) = (1-\frac{q}{2-q})(\frac{q}{2-q}) \neq 0$ (car $q \neq 1$) et $\mathbf{P}(\mathrm{X}=0,\mathrm{Y}=1)=0$. Donc : X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 (11P.) Soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée par

$$f(x) = \frac{2}{x^3}\mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Solution : Il est clair que $f \geq 0$ et que f est continue sur $\mathbf{R}\backslash\{1\}$. De plus, $\int_{\mathbf{R}} f(t)dt = 2\int_1^{+\infty} t^{-3}dt = 2[-t^{-2}/2]_1^{+\infty} = 0-(-1) = 1$.

(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(\mathrm{X}=3)$, $\mathbf{P}(\frac{1}{2} < \mathrm{X} \leq 2)$ et $\mathbf{P}(\mathrm{X} \geq a)$ pour $a \geq 1$.

Solution : On a $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{X}=3)=0}$, car X est une v.a.r. continue ;

$$\boxed{\mathbf{P}(\frac{1}{2} < \mathrm{X} \leq 2) = 2\int_1^2 t^{-3}dt = 2[-t^{-2}/2]_1^2 = 2(1/2-1/8) = 3/4};$$

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{X} \geq a) = 2\int_a^{+\infty} t^{-3}dt = 2[-t^{-2}/2]_a^{+\infty} = 1/a^2.}$$

(iii) Calculer l'espérance de X.

Solution : $\boxed{\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \int_{\mathbf{R}} t f(t)\,dt = 2\int_1^{+\infty} t^{-2}\,dt = 2[-t^{-1}]_1^{+\infty} = 2.}$

(iv) X possède-t-elle un moment d'ordre 2 ?

Solution : On a $\int_{\mathbf{R}} t^2 f(t)\,dt = 2\int_1^{+\infty} t^{-1}\,dt = 2[\log t]_1^{+\infty} = +\infty$; donc : X ne possède pas de moment d'ordre 2.

(v) Soit $\mathrm{Y} = \ln(\mathrm{X})$, où on définit $\ln(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{Y} \leq y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$. En déduire la loi de Y.

Solution : Soit $y \in \mathbf{R}$. On a $\mathbf{P}(\mathrm{Y} \leq y) = \mathbf{P}(\ln(\mathrm{X}) \leq y)$.

<u>1e cas :</u> supposons que $y \leq 0$. Comme $\{\ln \mathrm{X} \leq 0\} \subset \{\ln(\mathrm{X}) \leq 0\} \subset \{\mathrm{X} \leq 1\}$ et comme $\mathbf{P}(\mathrm{X} \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt = 0$, on a $\mathbf{P}(\ln(\mathrm{X}) \leq y) = 0$.

<u>2e cas :</u> supposons que $y > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{Y} < y) &= \mathbf{P}(0 < \mathrm{Y} \leq y) = \mathbf{P}(0 < \ln(\mathrm{X}) \leq y)\\ &= \mathbf{P}(1 < \mathrm{X} \leq e^y) = 2\int_1^{e^y} t^{-3}\,dt = 2[-t^{-2}/2]_1^{e^y} = 1 - e^{-2y}.\end{aligned}$$

La fonction de répartition de Y est donc

$$y \mapsto (1 - e^{-2y})\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y),$$

qui est la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathscr{E}(2)$; donc

$$\boxed{\mathrm{Y} \sim \mathscr{E}(2)}.$$