Université de Rennes 1–Année 2023/2024

L3—PS–Feuille de TD 9

Exercice 1. Pour un paramètre $a > 0$, soit X une variable aléatoire continue de densité f donnée par $f(x) = \dfrac{1}{x+a}\mathbf{1}_{[0,e-1]}(x)$.
(i) Déterminer a
(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X = 1)$ et $\mathbf{P}(0 < X < 2)$ et $\mathbf{P}(X > 3)$.
(iii) Calculer l'espérance de X.

Exercice 2. On considère un lot d'ampoules électriques. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la durée de vie de chaque ampoule est une v.a.r T avec $\mathbf{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$.

(i) Déterminer la loi de T et la reconnaître. Déterminer la durée de vie moyenne $\mathbf{E}(T)$ et l'écart-type $\sigma(T)$.

On branche en série 2 ampoules issues du même lot et de durées de vie indépendantes T_1 et T_2. Soit U l'instant où au moins une des ampoules cesse de fonctionner.
(ii) Calculer $\mathbf{P}(U > t)$ pour $t \in \mathbf{R}$.
(iii) Déterminer la fonction de répartition de U et reconnaître sa loi.
(iv) On mesure la durée de vie des ampoules en mois. En prenant $\lambda = 1/10$, après combien de mois en moyenne au moins une des deux ampoules cessera-t-elle de fonctionner ?

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω distribuée selon une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
(i) Montrer que $Y = X^2$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.
(ii) Soit A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que l'équation $t^2 - 2Y(\omega)t + 1 = 0$ possède deux solutions $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ avec $t_1 \neq t_2$. Déterminer $\mathbf{P}(A)$.

Exercice 4. Soit X une v.a.r. continue sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et f sa densité.
(i) Montrer que e^X est une v.a.r. continue et calculer sa densité. Expliciter cette densité dans le cas où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
(ii) On suppose que $X > 0$. Montrer que $1/X$ est une v.a.r. continue et calculer sa densité.
(iii) Montrer que $|X|$ est une v.a.r. continue et calculer sa densité.
(iv) Montrer que X^2 est une v.a.r. continue et calculer sa densité. Expliciter cette densité dans le cas où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.