

Université de Rennes 1
Année 2023/024

L3—PS
Feuille de TD 12

Exercice 1. Une association comprend 12 personnes.

- (i) Combien de permanences de cette association composées de 3 personnes peut on former ?
- (ii) Combien de bureaux de cette association composés d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier peut on former ?

Exercice 2. On lance un dé à 6 faces 4 fois de suite, de manière indépendante.

- (i) Décrire un espace probabilisé modélisant cette expérience aléatoire.
- (ii) Quelle est la probabilité que deux nombres distincts apparaissent, chacun deux fois, lors de ces 4 lancers ?

Exercice 3. On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 contenant 100 boules en tout. L'urne U_1 contient 40 boules dont 8 sont blanches et 32 noires ; l'urne U_2 contient 60 boules dont 6 sont blanches et 54 noires. On choisit au hasard une urne et on en tire une boule. Soient A_i l'évènement "l'urne choisie est U_i " pour $i = 1, 2$ et A l'évènement "la boule est blanche".

- (i) Calculer $\mathbf{P}(A|A_1)$, $\mathbf{P}(A|A_2)$ et $\mathbf{P}(A)$.
- (ii) On constate qu'on a tiré une boule blanche. Qu'elle est la probabilité qu'elle provient de l'urne U_2 .

Exercice 4. Un livre de 100 pages contient 1000 erreurs, réparties aux hasard selon les pages. On ouvre le livre et on compte le nombre X d'erreurs contenues dans une page.

Identifier la loi de X . Quelle est l'espérance de X ? Quelle est sa variance ?

Exercice 5. On considère une urne contenant 5 boules, dont 3 sont blanches et 2 noires. On tire de l'urne successivement deux boules **sans remise**. Soient X_1 (respectivement X_2) la v.a.r égale à 1 si la 1e (respectivement la 2e) boule est blanche et 0 sinon.

- (i) Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2) ainsi que la loi de X_1 et la loi de X_2 et présenter le résultat sous forme de tableau.
- (ii) Calculer $\mathbb{E}(X_1 X_2)$ et la covariance $\text{Cov}(X_1, X_2)$.

Exercice 6. Soit X v.a.r continue de loi sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$ pour $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 7. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Déterminer la loi de $Y = \cos(X)$.

Exercice 8. Pour $a > 0$, soit X une variable aléatoire continue de densité f , donnée par $f(x) = axe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.

- (i) Déterminer a .
- (ii) Soit $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
- (ii) Soit $Z = X^2 - X$. Déterminer la loi de Z .
- (iii) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

Exercice 9. Pour $a \in \mathbf{R}$, soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f définie par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{a}{(1+x+y)^2} \mathbf{1}_{[0,1[}(x) \mathbf{1}_{[0,1[}(y).$$

- (i) Déterminer a .
- (ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y .
- (iii) X et Y sont-elles indépendantes?
- (iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
- (v) Soit $x \in [0, 1]$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|x)$.
- (v) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$ de Y sachant X .