Université de Rennes 1–Année 2023/2024

L3—PS–Feuille de TD 10

Exercice 1. On lance une fléchette sur une cible circulaire
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$
de rayon 1. On suppose que le point d'impact Z de la fléchette est uniformément distribué sur la cible D. On écrit $Z = (X, Y)$, où X et Y sont les coordonnées cartésiennes du point d'impact.
(i) Quelle est la densité de Z?
(ii) Déterminer les densités marginales f_X et f_Y.

Exercice 2. Pour $a \in \mathbf{R}$, soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$, donnée par $f(x,y) = \begin{cases} a(x+y) & \text{si } (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$
(i) Calculer a.
(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercice 3. Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$, donnée par
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = a\frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y),$$
où a est un nombre réel.
(i) Déterminer a.
(ii) Déterminer la densité f_Y de Y.
(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
(iv) Calculer $\mathbf{E}(X)$ au moyen de la formule de transfert $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dxdy$.
(v) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercice 4. Deux personnes A et B se donnent rendez-vous à un endroit entre 0h et 1h. On suppose que chacune arrive indépendamment de l'autre à un instant aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. Soient X et Y les instants d'arrivée de A et de B respectivement.
(i) Quelles sont les lois de X et de Y ? Calculer $\mathrm{Var}(X + Y)$.
(ii) Soit T le temps d'attente de la 1ère personne arrivée. Exprimer T en fonction de X et Y. Calculer $\mathbf{E}(T^2)$.
(iii) Soient U et V les heures d'arrivée successives des deux personnes. Exprimer U et V en fonction de X et Y.
(iv) Déterminer les fonctions de répartition de U et V et en déduire leurs densités.
(v) Calculer $\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{E}(V)$ ainsi que $\mathrm{Var}(U)$ et $\mathrm{Var}(V)$. En déduire $\mathbf{E}(T)$.
(vi) ($*$) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(U, V)$. (*Indication :* on remarquera que $U + V = X + Y$ et que $\mathrm{Var}(U + V) = \mathrm{Var}(U) + \mathrm{Var}(V) + 2\mathbf{Cov}(U, V)$)