Université de Rennes 1
Année 2021/2022
Licence de Mathématiques 3

15 Décembre 2021

PRB-PSI1-Probabilités-Examen 1ère session

Durée : 120 minutes.

Aucun document n'est autorisé-Tout résultat est à justifier
Le barême est indicatif

Questions de cours. (6P.)
(i) Une course sportive réunit 18 athlètes. Le podium est formé des trois premiers arrivés, auxquels sont attribués une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?

Solution : Le nombre de tels podiums est le nombre d'arrangements de 3 parmi 18, c-à-d $A_{18}^{3} = 18 \times 17 \times 16 = 4896$

(ii) Dans d'un jeu 52 cartes, comportant quatre couleurs ("pique", "trèfle", etc) formées de 13 cartes chacune, on tire 3 cartes simultanément et au hasard.

(1) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.
Solution : L'espace probabilisé est $\Omega = \{3\text{−combinaisons sur } \{1, \dots, 52\}\}$, muni de la tribu $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ et de la mesure de probabilité uniforme $\mathbf{P}$ sur $\mathcal{F}$. Comme $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{52}{3} = (52 \times 51 \times 50)/6 = 22100$, on a $\mathbf{P}(A) = \mathrm{Card(A)}/1326$, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

(2) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un"pique" ?
Solution : Soit$A$ lévènement "on obtient au moins un pique". On a $\mathrm{Card}(\overline{\mathrm{A}}) = \binom{52-13}{3} = \binom{39}{3} = 9139$ et donc $\mathbf{P}(\overline{A}) = 9139/22100 = 0.41$ et $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 0.39$.

(iii) Le gérant d'un supermarché a reçu un lot de boîtes d'œufs. Il découvre que 5% des boîtes sont abimées ; il estime que 60% des boîtes abimées contiennent au moins un œuf cassé et que 98% des boîtes non abimées ne contiennent aucun œuf cassé. Un client prend au hasard une boîte du lot et constate qu'un des œufs est cassé. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi une boîte abimée ?

Solution : Soit A l'évènement "la boîte est abimée" et C l'évènement "la boîte contient un œuf cassé". On a $\mathbf{P}(A) = 5/100, , \mathbf{P}(C|A) = 6/10, \mathbf{P}(C|\overline{A}) =$

2/100; D'après la formule de Bayes, on a :

$$\mathbf{P}(A|C) = \frac{\mathbf{P}(C|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(C|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C|\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A})}$$
$$= (0.05 \times 0.6)/(0.05 \times 0.6 + 0.02 \times 0.98) = 30/49 \approx 0.612.$$

(iv) Un institut de sondage a observé, sur un échantillon de 10000 personnes prises au hasard, 52% d'intentions de vote en faveur du candidat A. Donner (avec la formule du cours) un intervalle de confiance pour la proportion p d'intentions de vote en faveur du candidat A dans la population au risque de 5%. (On rappelle qu'on a $\mathbf{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ pour une v.a.r $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.)

Solution : Un intervalle de confiance au risque de 5% est

$$I = \left[\frac{52}{100} - 1.96\frac{1}{2 \times \sqrt{10000}}, \frac{52}{100} + 1.96\frac{1}{2 \times \sqrt{10000}}\right] \approx [0.51, 0.53].$$

Exercice 1. (5P.) On considère une urne contenant 3 boules numérotées 1, 2 et 3. On procède à un tirage successif de deux boules, avec remise. Soient X_1 et X_2 la v.a.r. égale au numéro de la 1ère et de la 2e boule respectivement.

Soit $Y = \max\{X_1, X_2\}$.

(i) Les variables aléatoires X_1 et Y sont-elles indépendantes ? (Justifier votre réponse).

Solution : On a $\{Y = 1\} = \{X_1 = 1, X_2 = 1\}$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes (tirage avec remise) on a donc

$$\mathbf{P}(Y_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}(X_2 = 1) = 1/3 \times 1/3 = 1/9.$$

Or $\{Y = 1, X_1 = 1\} = \{Y = 1\}$. Donc

$$\mathbf{P}(Y = 1, X_1 = 1) = \mathbf{P}(Y = 1) = 1/9 \neq 1/9 \times 1/3 = \mathbf{P}(Y = 1)\mathbf{P}(X_1 = 1).$$

Donc X_1 et Y ne sont pas indépendantes.

(ii) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y.

Solution : On a (voir plus haut) $\mathbf{P}(Y = 1) = 1/9$ ainsi que

$$\mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) + \mathbf{P}(X_1 = 2, X_2 = 1) + \mathbf{P}(X_1 = 2, X_2 = 2) = 3/9$$

et

$$\mathbf{P}(Y=3) = 1-(1/9+3/9) = 5/9.$$

D'où $\mathbb{E}(Y) = 1/3 + 2(3/9) + 3(5/9) = 22/9$.
(iii) Déterminer la loi conjointe de (X_1, Y) et présenter le résultat sous forme de tableau.

Solution :

Y/X_1	1	2	3	P_Y
1	1/9	0	0	1/9
2	1/9	2/9	0	3/9
3	1/9	1/9	3/9	5/9
P_{X_1}	1/3	1/3	1/3	

(iv) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X_1, Y)$.

Solution : On a $\mathbb{E}(X_1) = 1(1/3) + 2(1/3) + 3(1/3) = 2$ et $\mathbb{E}(Y) = 22/9$. On a également (formule de transfert)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1Y) &= 1\mathbf{P}(X_1=1, Y=1) + 2\mathbf{P}(X_1=1, Y=2) + 3\mathbf{P}(X_1=1, Y=3) + 4\mathbf{P}(X_1=2, Y=2)\\ &+ 6\mathbf{P}(X_1=2, Y=3) + 9\mathbf{P}(X_1=3, Y=3)\\ &= 1/9 + 2(1/9) + 3(1/9) + 4(2/9) + 6(1/9) + 9(3/9) = 47/9.\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \mathbb{E}(X_1Y) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y) = 1/3$.

Exercice 2. (5P.)

Soit X une variable aléatoire de densité

$$x \mapsto f(x) = ax^2\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[2,3]}(x),$$

où a est un nombre réel.
(i) Déterminer a.

Solution : On a $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 ax^2dx + \int_2^3 \frac{1}{2}dx$, et donc $1 = [ax^3/3]_0^1 + 1/2 = a/3 + 1/2$ c-à-d $a = 3/2$.
(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X \in \{0,1\})$, $\mathbf{P}(X \leq 0)$ et $\mathbf{P}(0 < X < 2)$. (Justifier vos réponses).

Solution : On a $\mathbf{P}(X \in \{0,1\}) = \mathbf{P}(X=0) + \mathbf{P}(X=1) = 0+0$ car X est une v.a.r. continue. On a $\mathbf{P}(X \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx = 0$. On a $\mathbf{P}(0 < X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 ax^2dx + \int \frac{1}{2}0dx = a(1/3) = 1/2$.

(iii) Calculer $\mathbb{E}(X^3 - 60)$.

Solution : On a (par linéarité) $\mathbb{E}(X^3 - 60) = \mathbb{E}(X^3) - 60$ et (formule de transfert)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^3) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2}x^5 dx + \int_2^3 \frac{1}{2}x^3 dx \\ &= [\frac{3}{2}x^6/6]_0^1 + [\frac{1}{2}x^4/4]_2^3 = 67/8.\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}(X^3 - 60) = (67/8) - 60 = -413/8$.

(iv) Soit $Y = X^2$. Déterminer la densité de Y.

Solution : Soit $y \in \mathbf{R}$. On a $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y)$. Si $y \in]-\infty, 0[$, alors $F_Y(y) = 0$, car $X^2 \geq 0$ et donc $\{X^2 \leq y\} = \emptyset$. Soit $y \geq 0$. Alors $F_Y(y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y) = \mathbf{P}(X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f(x)dx$. On obtient la densité f_Y de Y en y par dérivation : $f_Y(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y})$. En résumé :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ \dfrac{3}{4}\sqrt{y} \text{ si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \text{ si } 1 \leq y \leq 4 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{y}} \text{ si } 4 \leq y \leq 9 \\ 0 \text{ si } y \geq 9. \end{cases}.$$

Exercice 3. (6P.) Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f définie par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = a(x + y)e^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{[0,2]}(y),$$

où a est un nombre réel.

(i) Déterminer a.

Solution : On a $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$ et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy &= a\int_0^{+\infty}\int_0^2 (x + y)e^{-x}dydx = a\int_0^{+\infty} e^{-x}(2x + [y^2/2]_0^2)dx \\ &= a\int_0^{+\infty} e^{-x}(2x + 2)dx = 2a(\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx) \\ &= 2a(1 + 1) = 4a.\end{aligned}$$

Donc $a = 1/4$.
(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.

Solution : Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ et donc $f_X(x) = 0$ pour $x \leq 0$; pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{4}\int_0^2 (x+y)e^{-x}dy = \frac{1}{4}(2xe^{-x} + e^{-x}[y^2/2]_0^2 = \\ &= \frac{e^{-x}}{2}(x+1) \end{aligned}$$

Pour $y \in \mathbf{R}$, on a $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ et donc $f_Y(y) = 0$ pour $y \notin [0,2]$; pour $y \in [0,2]$, on a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} (x+y)e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{4}(\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx + y\int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{4}(1 + y \times 1) = \frac{1}{4}(1+y). \end{aligned}$$

(iii) X et Y sont-elles indépendantes ? (Justifier votre réponse.)

Solution : Pour $x > 0$ et $y \in [0,2]$, on a

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{e^{-x}}{2}(x+1)\frac{1}{4}(1+y) = \frac{1}{8}(x+xy+y+1)e^{-x}.$$

Comme $\frac{1}{8}(x+xy+y+1)e^{-x} \neq \frac{1}{4}(x+y)e^{-x} = f(x,y)$, il s'ensuit (voir Cours) que X et Y ne sont pas indépendantes.
(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X,Y)$.

Solution : On a $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2}(x^2+2x)dx = 3/2$ et $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^2 \frac{1}{4}(y+y^2)dy = 7/6$. On a également

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\int_0^2 xy(x+y)e^{-x}dydx = 5/3.$$

D'où $\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 5/3 - (3/2)(7/6) = -1/12$.
(v) Soit $x \geq 0$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X=x)$.

Solution : Pour $y \in \mathbf{R}$, on a

$$f|_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+y)e^{-x}/(\frac{e^{-x}}{2}(x+1)) = \frac{x+y}{2x+2} & \text{si } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X=x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f|_{Y|X=x}(y)dy \\ &= \int_0^2 \frac{xy+y^2}{2x+2}dy = \frac{1}{2x+2}[xy^2/2 + y^3/3]_{y=0}^{y=2} \\ &= \frac{2x+8/3}{2x+2}. \end{aligned}$$

(vi) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$.

Solution : Comme $\mathbb{E}(Y|X = x) = \dfrac{2x+8/3}{2x+2}$, pour tout $x \geq 0$, on a $\mathbb{E}(Y|X) = \dfrac{2X+8/3}{2X+2}$.