Université de Rennes 1
Année 2015/2016

10 Mai 2016

PRB-PROBABILITÉS-EXAMEN 1ÈRE SESSION

Durée : 120 minutes ; documents non permis- Barème indicatif

Questions de cours. (5P.) (i) On lance un dé à 6 faces 4 fois de suite, de manière indépendante. Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire ainsi que la mesure de probabilité associée. Quelle est la probabilité que deux nombres distincts apparaissent, chacun deux fois, lors de ces 4 lancers.

Solution : L'univers est $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^4$, avec la mesure uniforme $\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ pour tout $A \subset \Omega$. Soit A l'événement "deux nombres distincts apparaissent, chacun deux fois". Il y a $\binom{6}{2}$ choix possibles pour les deux nombres qui apparaissent dans A; pour chacun de ces choix, il y a $\binom{4}{2}$ choix possibles de leur positions. D'où $\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{6^4} = \frac{5}{72}$.

(ii) Vingt chevaux sont au départ d'une course. On admet que tous les tiercés possibles (les trois chevaux gagnants dans l'ordre) sont équiprobables. Quelle est la probabilité pour un parieur jouant une fois (c-à-d ayant parié une fois sur un tiercé) d'obtenir le tiercé gagnant dans l'ordre ou dans le désordre.

Solution : Il y a $20 \times 19 \times 18$ tiercés gagnants possibles ; chaque tiercé gagnant peut être réordonner de $3! = 6$ façons. La probabilité cherchée est donc $\frac{6}{20\times 19\times 18} = \frac{1}{1140}$.

(iii) On lance une pièce de monnaie équilibrée 3 fois de suite. Soit X la v.a.r donnant le nombre de Piles obtenus après ces 3 lancers. Quelle est la loi de X ?

Solution : X est de loi binomiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$.

(iv) On lance un dé équilibré 1000 fois de suite ; soit X la v.a.r donnant la **proportion** de Six obtenus après ces 1000 lancers. Majorer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev la probabilité $\mathbf{P}(|X - 1/6| \geq 0.1)$.

Solution : $X = \frac{1}{n}\sum_i^n X_i$ avec $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de loi $\mathcal{B}(1/6)$. Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}$ et $\text{Var}(X) = \frac{5/6^2}{n} = \frac{5}{36n}$ Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbf{P}(|X - 1/6| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}$; avec $\epsilon = 0.1$ et $n = 1000$, on a donc $\mathbf{P}(|X - 1/6| \geq 0.1) \leq \frac{5\times 100}{36\times 1000} = \frac{1}{72}$.

Exercice 1. (4P.) On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 contenant 100 boules en tout. L'urne U_1 contient 40 boules dont 8 sont blanches et 32 noires ; l'urne U_2 contient 60 boules dont 6 sont blanches et 54 noires. On choisit au hasard une urne et on en tire une boule. Soient A_i l'évènement "l'urne choisie est U_i" pour $i = 1, 2$ et A l'événement "la boule est blanche".

(i) Calculer $\mathbf{P}(A|A_1), \mathbf{P}(A|A_2)$ et $\mathbf{P}(A)$.

Solution : On a $\mathbf{P}(A|A_1) = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$ et $\mathbf{P}(A|A_2) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$. De plus, $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 1/2$. D'où $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|A_1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A|A_2)\mathbf{P}(A_2) = \frac{3}{20}$.

(ii) On constate qu'on a tiré une boule blanche. Qu'elle est la probabilité qu'elle provient de l'urne U_2.

Solution : La probabilité cherchée est $\mathbf{P}(A_2|A) = \frac{\mathbf{P}(A\cap A_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|A_2)\mathbf{P}(A_2)}{\mathbf{P}(A)} = 1/3$.

Exercice 2. (4P.) On considère une urne contenant 5 boules, dont 3 sont blanches et 2 noires. On tire de l'urne successivement deux boules **sans remise**. Soient X_1 (respectivement X_2) la v.a.r égale à 1 si la 1e (respectivement la 2e) boule est blanche et 0 sinon.

(i) Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2) ainsi que la loi de X_1 et la loi de X_2 et présenter le résultat sous forme de tableau.

Solution : On a $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ et $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, et on obtient le tableau suivant

X_2/X_1	1	0	P_{X_2}
1	3/10	3/10	6/10
0	3/10	1/10	4/10
P_{X_1}	6/10	4/10	1

(ii) Calculer $\mathbb{E}(X_1X_2)$ et la covariance $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Solution : On a $\mathbb{E}(X_1X_2) = 1 \times \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 3/10$; d'autre part, $\mathbb{E}(X_1) = 1 \times \mathbf{P}(X_1 = 1) = 6/10$ et $\mathbb{E}(X_2) = 1 \times \mathbf{P}(X_2 = 1) = 6/10$. D'où $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = -3/50$.

Exercice 3. (4P.) On considère un lot d'ampoules électriques. On suppose que la durée de vie de chaque ampoule est une v.a.r T telle qu'il existe $\lambda > 0$ avec $\mathbf{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$.

(i) Déterminer la loi de T et la reconnaître. Déterminer la durée de vie moyenne $\mathbb{E}(T)$ et l'écart-type $\sigma(T)$.

Solution : On a $F_T(t) = \mathbf{P}(T \leq t) = 1 - \mathbf{P}(T > t)$ et ainsi $F_T(t) = 0$ pour $t < 0$ et $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$. On a donc $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Par les résultats du cours, on a alors $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$ et $\sigma(T) = \frac{1}{\lambda}$.

On branche simultanément 2 ampoules issues du même lot et de durées de vie indépendantes T_1 et T_2.

(ii) Déterminer la loi de l'instant U où au moins une des ampoules cesse de fonctionner.

Solution : On a $U = \min\{T_1, T_2\}$; pour tout $t \geq 0$, on a donc $\mathbf{P}(U > t) = \mathbf{P}(T_1 > t, T_2 > t) = \mathbf{P}(T_1 > t)\mathbf{P}(T_2 > t) = e^{-2\lambda t}$, par indépendance de T_1 et T_2. Ainsi (avec (i)), $U \sim \mathcal{E}(2\lambda)$.

(iii) Déterminer la loi de l'instant V où toutes les deux ampoules cessent de fonctionner.

Solution : On a $V = \max\{T_1, T_2\}$; pour tout $t \geq 0$, on a donc $\mathbf{P}(V \leq t) = \mathbf{P}(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = \mathbf{P}(T_1 \leq t)\mathbf{P}(T_2 \leq t) = (1 - e^{\lambda t})^2$, par indépendance de T_1 et T_2. D'où $F_V(t) = (1 - e^{\lambda t})^2 \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 4. (4P.) Soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée par $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.
(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Solution : On a $f(x) \geq 0$ pour tout x et f est continue. De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx = [e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{+\infty} = 1$.

(ii) Soit $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.

Solution : Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on a $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y)$. Pour $y < 0$, on a donc $F_Y(y) = 0$; pour $y \geq 0$, on a, avec le changement de variable $u = x^2$: $F_Y(y) = \mathbf{P}(X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} xe^{-x^2/2}dx = \frac{1}{2}\int_0^y e^{-u/2}du$. Ceci montre que $Y \sim \mathcal{E}(1/2)$.

(iii) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Solution : Avec une IPP, on a $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx = [xe^{-x^2/2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = 0 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\pi/2}$. De plus, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y) = 2$, car $Y \sim \mathcal{E}(1/2)$. D'où $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5. (3P.) Une usine fabrique des lave-vaisselle ayant une durée de vie moyenne de 20 000h, avec un écart-type de 7 000h. Le fabricant affirme qu'une innovation dans son mode de fabrication a augmenté la durée de vie de ses produits. On teste 100 lave-vaisselle et on observe une durée de vie moyenne de 21 000h sur cet échantillon. Au seuil de risque de $\alpha = 5\%$, peut-on accepter l'affirmation du fabriquant ? (On rappelle les valeurs suivantes de la fonction de répartition de la loi normale : $\Pi(1.65) = 0.95$, $\Pi(1.96) = 0.975$.)

Solution : En notant m la durée de vie moyenne des lave-vaisselle, on veut tester l'hypothèse $H_0 : m = 20000h$ contre $H_1 : m > 20000h$. En notant $\overline{X}$ la moyenne empirique d'un échantillon de n lave-vaisselle, on a, pour n suffisamment grand, $\sqrt{n}(\overline{X} - m)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Avec z_α tel que $\Pi(z_\alpha) = 1 - \alpha$, il vient que $\mathbf{P}(\sqrt{n}(\overline{X} - m)/\sigma \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$ (en d'autres termes : $\mathbf{P}(\overline{X} \leq m + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$). Sous l'hypothèse H_0, on a $m = 20000$ et avec $n = 100$ et $\overline{x} = 21000$, on a $\sqrt{n}(\overline{x} - m)/\sigma = \frac{1000}{7000} = 1.43$. Avec $\alpha = 0.05$, on a $z_\alpha = 1.65$ et donc $\sqrt{n}(\overline{x} - m)/\sigma = 1.43 < 1.65 = z_\alpha$. (en d'autres termes : $\overline{x} = 21000 \leq m + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 21155$). Conclusion : au seuil de risque de 5%, on ne rejette pas l'hypothèse H_0 et on ne considère donc pas que la durée de vie moyenne des lave-vaisselle se soit améliorée.

Remarque : on aurait pu tester $H_0 : m = 20000h$ contre $H_1 : m \neq 20000h$ ("test bilatéral") . Dans ce cas, avec $\alpha = 0.05$ et donc $z_{\alpha/2} = 1.96$, on a $\mathbf{P}(|\sqrt{n}(\overline{X} - m)/\sigma| \leq z_{\alpha/2}) = 0.95$. Ceci signifie que, avec probabilité 0.95, on a $\overline{X} \in [m - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = [18628, 21372]$. Comme $\overline{x} = 21000 \in [18628, 21372]$, on ne rejette pas l'hypothèse H_0.