Université de Rennes 1-Année 2016/2017

PRB-Probabilités-Examen 1ère session du 2/5/2017

Corrigé

Questions de cours. (6P.) (i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements tels que $\mathbf{P}(A) = 1/3$, $\mathbf{P}(B) = 1/2$ et $\mathbf{P}(A|B) = 1/3$. Calculer $\mathbf{P}(A \cup B)$.

On a $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)$; d'où $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

(ii) Trois cartes sont tirées au hasard et **simultanément** d'un jeu de 52 cartes. Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire ainsi que la mesure de probabilité associée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux "As" ?

L'univers est $\Omega = \{$3-combinaisons d'un ensemble à 52 éléments$\}$, dont le cardinal est $\binom{52}{3}$ et qui est muni de la mesure de probabilité uniforme. Pour avoir exactement deux "As", il faut choisir 2 "As" parmi les 4 disponibles et choisir la 3e carte parmi les 48 cartes restantes ; il y a donc $\binom{4}{2} \times 48$ choix possibles. La probabilité recherchée est $\frac{\binom{4}{2}\times 48}{\binom{52}{3}} = \frac{72}{5525} \approx 0.013$.

(iii) Un test de type QCM comporte 20 questions et, pour chacune d'elles, propose 4 réponses, dont seule une est correcte. Le candidat doit cocher une seule réponse à chaque question. La note obtenue est le nombre de bonnes réponses. Soit X la variable aléatoire donnant la note d'un candidat répondant au hasard et de façon équiprobable à toutes les questions. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

On a $X \sim \mathcal{B}(20, 1/4)$ et donc $\mathbb{E}(X) = 20/4 = 5$ et $\mathrm{Var}(X) = 20 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 15/4$.

(iv) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance m et de variance σ^2. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Que dit le Théorème Central Limite sur la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(a \le \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \le b\right)?$$

Il dit que la v.a.r $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{S_n}{n} - m)$ tend vers une loi normale centrée réduite et donc que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(a \le \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \le b\right) = \Pi(b) - \Pi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx$ pour tous $a < b$.

Exercice 1. (2P.) On suppose qu'un virus affecte une personne sur 1000 dans la population. Un test sanguin permet de détecter le virus avec une probabilité de 90 % quand celui-ci est effectivement présent. Néanmoins, ce test donne un faux positif (i.e. une personne est déclarée porteuse sans l'être) pour 1% des personnes non porteuses du virus.

Une personne est testée positivement. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement porteuse du virus ?

Soit A l'évènement "la personne est porteuse du virus" et B l'évènement "le test est positif". On cherche $\mathbf{P}(A|B)$. D'après les données, on a $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{1000}$, $\mathbf{P}(B|A) = \frac{9}{10}$, $\mathbf{P}(B|A^c) = \frac{1}{100}$; D'après la formule de Bayes, on a :

$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B|A^c)\mathbf{P}(A^c)}$ et donc $\mathbf{P}(A|B) = \frac{9\times 10^{-1}\times 10^{-3}}{9\times 10^{-1}\times 10^{-3}+10^{-2}\times 99\times 10^{-3}} = \frac{10}{121} \approx 0.08$.

Exercice 2. (4P.) Soient X et Y deux v.a.r qui suivent des lois de Bernoulli, chacune de paramètres 1/2. On suppose que $\mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = 1/12$.

(i) Déterminer la loi conjointe de (X, Y), en présentant le résultat sous forme de tableau.

X/Y	0	1	P_X
0	1/12	5/12	1/2
1	5/12	1/12	1/2
P_Y	1/2	1/2	1

(ii) Montrer que XY est une v.a.r. de Bernoulli dont on identifiera le paramètre.

On a $XY(\Omega) \in \{0,1\}$; comme $\{XY = 1\} = \{X = 1, Y = 1\}$, on a $\mathbf{P}(XY = 1) = \mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = 1/12$ et donc $XY \sim \mathcal{B}(1/12)$.

(iii) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$; X et Y sont elles indépendantes ?

On a $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$; comme $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, les v.a.r X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3. (5P.) Dans un restaurant universitaire, il y a deux caisses notées A et B. On suppose que le nombre d'étudiants qui pénètrent dans le restaurant en une heure est une v.a.r. N de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose aussi que, indépendamment les uns des autres, les étudiants choisissent de passer par la caisse A avec probabilité $p \in]0, 1[$. Soit X le nombre d'étudiants par heure passant par la caisse A.

(i) Que vaut $\mathbf{P}(N = n)$ pour $n \in \mathbf{N}$?

Comme $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a $\mathbf{P}(N = n) = e^{-\lambda}\ \lambda^n/n!$.

(ii) Calculer $\mathbf{P}(X = k|N = n)$ pour des entiers naturels k et n.

Pour $k > n$, on a $\{X = k, N = n\} = \emptyset$ et donc $\mathbf{P}(X = k|N = n) = 0$. Pour $k \leq n$, on a $\mathbf{P}(X = k|N = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, pour $q = 1 - p$.

(iii) Déterminer la loi de X et la reconnaître ; en déduire $\mathbb{E}(X)$.

Soit $k \in \mathbf{N}$. On a $\{X = k\} = \cup_{n=0}^{\infty}\{X = k, N = n\} = \cup_{n=k}^{\infty}\{X = k, N = n\}$ (réunion disjointe) et donc :

$\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(X = k, N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(X = k|N = n)\mathbf{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} p^k q^n \times \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} = \lambda^k p^k e^{-\lambda} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n \lambda^n}{n!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda q} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$; d'où $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 4. (4P.) Soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée par $f(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

On a : $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, f est continue sur $\mathbf{R}\backslash\{0,1\}$ et $\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{\pi} \times \arcsin x|_0^1 = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1$. Donc f est bien une densité de probabilité.

(ii) Montrer que X possède une espérance et la calculer.

On a $\int_{\mathbf{R}} |xf(x)|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{\pi} \times (-2(1-x^2)^{1/2})|_0^1 = \frac{2}{\pi}$. Comme $\int_{\mathbf{R}} |xf(x)|dx = \int_0^1 |xf(x)|dx = \int_0^1 xf(x)dx = \int_{\mathbf{R}} xf(x)dx$, ceci montre que $\mathbb{E}(X)$ existe et qu'on a $\mathbb{E}(X) = 2/\pi$.

(iii) Soit $Y = \arcsin(X)$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.

On a $Y(\Omega) = [0, \pi/2]$, car $X(\Omega) = [0,1]$. D'où $\mathbf{P}(Y \leq y) = 0$ pour $y \leq 0$ et $\mathbf{P}(Y \leq y) = 1$ pour $y \geq \pi/2$. Soit $y \in [0, \pi/2]$; alors $\{Y \leq y\} = \{\arcsin(X) \leq y\} = \{X \leq \sin(y)\}$; comme $\sin(y) \in [0,1]$, on a donc $\mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(X \leq \sin y) = \int_0^{\sin(y)} \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{\pi}\arcsin x|_0^{\sin(y)} = \frac{2}{\pi}y$. Ceci montre que Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,\pi/2])$.

Exercice 5. (3P.) A la veille du second tour d'une élection présidentielle, un sondage portant sur $n = 10000$ électeurs donne 60% d'intentions de votes pour le candidat A contre 40% pour le candidat B. Soit p la proportion des électeurs de A au sein de la population. Déterminer, au moyen du Théorème Central Limite, $a > 0$ tel que $\mathbf{P}(\frac{3}{5} - a \leq p \leq \frac{3}{5} + a) = 0.95$. (On rappelle les valeurs suivantes de la fonction de répartition de la loi normale : $\Pi(1.65) = 0.95$, $\Pi(1.96) = 0.975$.)

En notant $\overline{X}$ la proportion d'électeurs de A d'un échantillon de n électeurs, on a $\overline{X} \sim \mathcal{B}(p)$; par le Théorème central limite, on a, avec $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ et pour n suffisamment grand, $\sqrt{n}(\overline{X} - p)/\sigma \ \sim \mathcal{N}(0,1)$. Comme $\Pi(1.96) = 0.975$, on a donc :

$\mathbf{P}(-1.96 \leq \sqrt{n}(\overline{X} - p)/\sigma \leq 1.96) = \mathbf{P}(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq p \leq \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$. Comme $n = 10^4$ et $\sigma = \sqrt{p(1-p)} \leq 1/2$, il s'ensuit que :

$\mathbf{P}(\overline{X} - 1.96 \times \frac{1}{2} \times 10^{-2} \leq p \leq \overline{X} + 1.96 \times \frac{1}{2} \times 10^{-2}) \geq 0.95$.

Le résultat du sondage a donné la valeur $\overline{X} = 60/100 = 3/5$ et donc $\mathbf{P}(\frac{3}{5} - 0.98 \times 10^{-2} \leq p \leq \frac{3}{5} + 0.98 \times 10^{-2}) \geq 0.95$, c-à-d $\mathbf{P}(\frac{3}{5} - \frac{0.98}{100} \leq p \leq \frac{3}{5} + \frac{0.98}{100})$ avec une probabilité d'au moins 95%. La "fourchette" est donc $\approx 1\%$.