Université de Rennes 1–Année 2015/2016

L2–Probabilités de base–DM1

Enoncé et Corrigé

Exercice 1. (Formule du crible de Poincaré) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

(i) Soient $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$. On pose $p_i = \mathbf{P}(A_i), p_{ij} = \mathbf{P}(A_i \cap A_j)$ pour $1 \leq i, j \leq 3$ avec $i \neq j$ et $p_{123} = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Montrer que

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_{12} - p_{13} - p_{23} + p_{123}.$$

Solution : On applique plusieurs fois la formule $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$, valable pour tous $A, B \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbf{P}((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = \mathbf{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbf{P}(A_3) - \mathbf{P}((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\
&= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}(A_3) - \mathbf{P}((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\
&= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}(A_3) - (\mathbf{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbf{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\
&= p_1 + p_2 + p_3 - p_{12} - p_{13} - p_{23} + p_{123}.
\end{aligned}$$

(ii) Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Montrer que

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right)$$

Solution : On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Le cas $n = 1$ étant évident, on suppose l'assertion vraie pour toute réunion de n parties de $\mathcal{F}$. Soient $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{F}$. Alors, en appliquant la formule (connue) dans le cas $n = 2$ et deux fois l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)) &= \mathbf{P}((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}) = \mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right) + \\
&+ \mathbf{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right) + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k < i_{k+1} = n+1} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \neq n+1} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right) + \\
&+ \sum_{l=2}^{n+1} (-1)^{l-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_l = n+1} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n+1} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n+1} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right).
\end{aligned}$$

(iii) *Application :* n personnes déposent leurs chapeaux dans un vestiaire ; à la sortie, chacun prend un chapeau au hasard. Expliciter l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ qui modélise cette expérience aléatoire. Déterminer la probabilité p_n de l'évènement ≪ au moins une personne récupère son propre chapeau ≫. Quelle est la limite $\lim_{n\to+\infty} p_n$?

Solution : On numérote les personnes par $1, \dots, n$ ainsi que les chapeaux. Un choix au hasard de n chapeaux par ces n personnes correspond à une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, c-à-d à une bijection $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$: la personne numéro i choisit le chapeau numéro $\sigma(i)$, pour $i = 1, \dots, n$. L'univers Ω est donc l'ensemble $\mathrm{Perm}(\{1, \dots, n\})$ des permutations de $\{1, \dots, n\}$, muni de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$ sur l'ensemble $\mathbf{P}(\Omega)$ des parties de Ω. Comme $\mathrm{Card}(\Omega) = n!$, on a $\mathbf{P}(A) = \mathrm{Card}(A)/n!$ pour tout $A \in \mathbf{P}(\Omega)$.

L'évènement "au moins une personne récupère son propre chapeau" correspond à la partie A de Ω formée des permutations σ avec un point fixe : il existe $i \in \{1, \dots, \}$ tel que $\sigma(i) = i$. Pour chaque $i = 1, \dots, n$, considérons la partie $A_i = \{\sigma \in \Omega / \sigma(i) = i\}$. Alors $A = \cup_{i=1}^n A_i$. D'autre part, $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} = \{\sigma \in \Omega / \sigma(i_1) = i_1, \dots, \sigma(i_k) = i_k\}$, pour tout $k \in \{1, \dots, \}$ et $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. Comme l'application $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \to \mathrm{Perm}\left(\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}\right)$, $\quad \sigma \mapsto \sigma|_{\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_k\}}$ est une bijection, on a $\mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$. Avec la formule du crible de Poincaré (voir plus haut), on a donc

$$\begin{aligned} p_n = \mathbf{P}(A) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{1\le i_1 < i_2 \cdots < i_k \le n} \frac{(n-k)!}{n!} \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(n-k)!}{n!} \left(\sum_{1\le i_1 < i_2 \cdots < i_k \le n} 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(n-k)!}{n!} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

On a $\lim_{n\to+\infty} p_n = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{1}{k!} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!} = 1 - e^{-1} \sim 0,632$

Exercice 2. Soit X une v.a.r. sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0,1[$, c-à-d X prend ses valeurs dans $\mathbf{N}^*$ et,pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(X = k) = q^{k-1}p$ avec $q = 1-p$.

(i) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Solution : Soit $x \in \mathbf{R}$; pour $x < 1$, on a $F_X(x) = \mathbf{P}(X \le x) = 0$ car $\mathcal{X}(\Omega) = \mathbf{N}^*$. Soit $x \ge 1$. En posant $k = E(x)$ (partie entière de x), on a

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(X = i) = p \sum_{i=1}^k q^{i-1} = p \frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k.$$

(ii) Pour $x \in \mathbf{R}$, calculer $\mathbf{P}(X > x)$.

Solution : On a $\mathbf{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$. Pour $x < 1$, on a donc $\mathbf{P}(X > x) = 1$; pour $x \ge 1$, on a $\mathbf{P}(X > x) = q^k$ avec $k = E(x)$.

Soient $X_1, \dots X_n$ des v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant toutes la loi $\mathcal{G}(p)$. On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, c-à-d

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = k_i) \qquad \text{pour tout} \quad (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}.$$

On considère les v.a.r $U = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $V = \max(X_1, \dots, X_n)$.

(iii) Déterminer la fonction de répartition F_V de V et en déduire la loi de V.

Solution : Soit $x \in \mathbf{R}$; on a $F_V(x) = \mathbf{P}(V = \max_{i=1}^n X_i \le x) = \mathbf{P}(\cap_{i=1}^n X_i \le x)$ et donc, par indépendance de $X_1, \dots, X_n$:

$$F_V(x) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \le x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x) = F_X(x)^n,$$

où $X \sim G(p)$. D'où, en tenant compte de (i) : $F_V(x) = 0$ si $x < 1$ et $F_V(x) = (1-q^k)^n$ si $x \geq 1$ et $k = E(x)$. Il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}(V = k) = F_V(k) - F_V(k-1) = (1-q^k)^n - (1-q^{k-1})^n.$$

(iv) Déterminer la loi de U.

Solution : Soit $x \in \mathbf{R}$; on a $F_U(x) = \mathbf{P}(U \leq x) = 1 - \mathbf{P}(U = \min_{i=1}^n X_i > x) = 1 - \mathbf{P}(\cap_{i=1}^n X_i > x)$ et donc, par indépendance, $F_U(x) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i > x)$. D'où, en tenant compte de (ii) : $F_U(x) = 0$ si $x < 1$ et $F_U(x) = 1 - q^{kn}$ si $x \geq 1$ et $k = E(x)$. Il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}(U = k) = F_U(k) - F_U(k-1) = q^{(k-1)n} - q^{kn}.$$

(v) *Application :* On jette 5 dés. On met de côté les dés qui affichent un "6" et on recommence. De nouveau, on met de côté les dés qui affichent un "6" et ainsi de suite. Le jeu s'arrête quand il n'y a plus de dé. En associant au dé de numéro $i \in \{1, \ldots, 5\}$ la v.a.r X_i qui est égale au moment d'apparition du "6' sur ce dé, déterminer la v.a.r N égale à la durée du jeu ainsi que son espérance $\mathbb{E}(N)$.

Solution : Les v.a.r $X_1, \ldots, X_5$ sont indépendantes et chacune de loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p = 1/6$. Le jeu s'arrête au moment d'apparition du dernier "6", c-à-d dire à l'instant (aléatoire) donné par $\max\{X_1, \ldots; X_5\}$. Donc $N = \max\{X_1, \ldots; X_5\}$. En tenant compte de (iii), pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a $\mathbf{P}(N = k) = (1-q^k)^5 - (1-q^{k-1})^5$ avec $q = 5/6$ et donc

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left((1-q^k)^5 - (1-q^{k-1})^5\right) \sim 13.023$$