

Université de Rennes 1–Année 2016/2017
L2–Probabilités de base–DM1
à rendre le 9 février en TD

Exercice 1. (Formule du crible de Poincaré) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$.

(i) Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour toute famille $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right)$$

(ii) *Application* : n personnes déposent leurs chapeaux dans un vestiaire ; à la sortie, chacun prend un chapeau au hasard. Expliciter l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ qui modélise cette expérience aléatoire. Déterminer la probabilité p_n de l'évènement « au moins une personne récupère son propre chapeau ». Quelle est la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$?

Exercice 2. (Probabilités de combinaisons au poker) Au poker, une **main** désigne un ensemble de 5 cartes piochées dans un paquet de 52 cartes. Il y a 4 **couleurs** (pique-coeur-carreau-trèfle) et 13 **hauteurs** consécutives (as-roi-dame-valet-dix-neuf-huit-sept-six-cinq-quatre-trois-deux).

(i) Modéliser l'expérience aléatoire par un espace probabilisé adéquat. Quelle est le nombre total de mains ?

(ii) Une **quinteflush** est une main constituée de 5 cartes de même couleur et de hauteurs consécutives (i.e. as-roi-dame-valet-dix de pique ou as-roi-dame-valet-dix de coeur etc...). Quelle est la probabilité d'obtenir une quinteflush ?

(iii) Un **carré** est une main constituée de 4 cartes de même hauteur (i.e. 4 as, 4 rois etc...) et d'une cinquième carte. Quelle est la probabilité de piocher un carré ?

(iv) Un **full** est une main constituée de 3 cartes de même hauteur et de deux cartes de même hauteur. Quelle est la probabilité de piocher un full ?

(v) Une **couleur** est constituée de 5 cartes de même couleur et qui n'est pas une quinteflush. Quelle est la probabilité de piocher une couleur ?

(vi) Une **suite** est une main constituée de 5 cartes de hauteurs consécutives (i.e. as, roi, dame, valet, dix etc..) et qui n'est pas une quinteflush. Quelle est la probabilité de piocher une suite ?

(vii) Un **breelan** est une main constituée de 3 cartes de même hauteur et de deux autres cartes de hauteur différentes et qui n'est pas un carré. Quelle est la probabilité d'obtenir un breelan ?

(viii) Classer les combinaisons ci-dessus par ordre de rareté.