Université de Rennes 1
Année 2015/2016

Licence 2-3

Probabilités – CC2 du 21/4/2016

NOM, prénom :

Question de cours 1 (8P.) Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $p \in]0,1[$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes toutes distribuées selon une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
(i) Quelle est l'ensemble des valeurs de S_n?

Solution : $S_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.

(ii) Quelle est la loi de S_n?

Solution : $S_n \sim \mathscr{B}(n, p)$.

(iii) Quelles sont l'espérance $m = \mathbb{E}(S_n)$ et la variance $\sigma^2 = \mathrm{Var}(S_n)$ de S_n?

Solution : $\mathbb{E}(S_n) = np, \mathrm{Var}(S_n) = np(1-p)$

(iv) Soient $a < b$. Que dit le Théorème Central Limite sur la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(a < \frac{S_n - m}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right).$$

Solution : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(a < \frac{S_n - m}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \Pi(b) - \Pi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$

(v) On lance 100 fois une pièce équilibrée. Déterminer un intervalle

$$I = [50 - \alpha, 50 + \alpha]$$

aussi petit que possible tel que le nombre de “Piles" obtenu soit dans I avec une probabilité de 95%. (On rappelle que $\Pi(1.96) = 0.975$.)

Solution : Soit S_{100} le nombre de Piles obtenus ; comme $n = 100 \geq 30$, on peut considérer que $\mathbf{P}\left(-1.96 < \frac{S_{100} - 50}{\sqrt{100}/2} \leq 1.96\right) = \Pi(1.96) - \Pi(-1.96) = 0.95$, c-à-d $-1.96 \times 10 \times (1/2) \leq S_{100} - 50 \leq 1.96 \times 10 \times (1/2)$, ou encore $\boxed{S_{100} \in [40.2, 59.8]}$ avec probabilité de 95%.

Exercice 2 (8P.) Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires avec $X(\Omega) = \{-1, 1\}, Y(\Omega) = \{1, 2\}$ et tel que

$$\mathbf{P}(X = -1) = 1/4, \quad \mathbf{P}(Y = 1) = 1/3.$$

Posons $p = \mathbf{P}(X = -1, Y = 1)$.
(i) Exprimer en fonction de p la loi conjointe de X et Y et présenter le résultat sous forme d'un tableau.

Solution : On a $\mathbf{P}(X=1) = 1-\mathbf{P}(X=-1) = 3/4$ et $\mathbf{P}(Y=2) = 1-\mathbf{P}(Y=1) = 2/3$. On calcule les probabilités conditionelles $\mathbf{P}(X=-1, Y=2) = \mathbf{P}(X=-1) - \mathbf{P}(X=-1, Y=1) = \frac{1}{4} - p$, $\mathbf{P}(X=1, Y=1) = \mathbf{P}(Y=1) - \mathbf{P}(X=-1, Y=1) = \frac{1}{3} - p$, $\mathbf{P}(X=1, Y=2) = \mathbf{P}(X=1) - \mathbf{P}(X=1, Y=1) = \frac{5}{12} + p$, et on obtient le tableau suivant

Y/X	-1	1	P_Y
1	p	$\frac{1}{3}-p$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{4}-p$	$\frac{5}{12}+p$	$\frac{2}{3}$
P_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

(ii) Quelles conditions doit-on imposer à p?

Solution : Toutes les probabilités du tableau doivent être des nombres dans $[0,1]$; on doit donc avoir $0 \le p \le 1, p \le \frac{1}{3}, p \le \frac{1}{4}, \frac{5}{12} + p \le 1$; ceci équivaut à $\boxed{0 \le p \le \frac{1}{4}}$.

(iii) Déterminer p pour que X et Y soient indépendantes.

Solution : Si X et Y sont indépendantes, on a $\mathbf{P}(X=-1, Y=1) = \mathbf{P}(X=-1)\mathbf{P}(Y=1)$, c-à-d $\boxed{p = 1/12.}$ La condition $p = 1/12$ est donc nécessaire pour l'indépendance de X et Y ; elle est aussi suffisante, car, avec $p = 1/12$, on a $\mathbf{P}(X=-1, Y=2) = 2/12 = \mathbf{P}(X=-1)\mathbf{P}(Y=2)$, $\mathbf{P}(X=1, Y=1) = 3/12 = \mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=1)$ et $\mathbf{P}(X=1, Y=2) = 6/12 = \mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=2)$.

(iv) Calculer $\mathbb{E}(XY)$ quand p est comme dans (iii).

Solution : On a $\mathbb{E}(X) = -1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(Y) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; comme X et Y sont indépendantes, on a donc (cours) $\boxed{\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{6}.}$

Exercice 3 (8P.) Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω distribuée selon une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$. (On rappelle que ceci signifie que X est continue, de densité f définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$.) Soit $Y = X^2$.

(i) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

Solution : Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on a $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \le y) = \mathbf{P}(X^2 \le y)$ et donc $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$ et $\boxed{F_Y(y) = \mathbf{P}(X \le \sqrt{y}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}}}$ pour $y \ge 0$.

(ii) Montrer que Y suit une loi continue dont on déterminera la densité g.

Solution : Pour tout $y \ge 0$, on a (avec le changement de variable $x = \sqrt{t}$) : $F_Y(y) = \mathbf{P}(X \le \sqrt{y}) = \lambda \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-\lambda\sqrt{t}} dt$. Donc Y est continue de densité g définie par $\boxed{g(y) = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} e^{-\lambda\sqrt{y}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y).}$

(iii) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Solution : On a, par la formule de Koenig, $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.}$

(iv) Soit A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que l'équation $t^2 - 2Y(\omega)t + 1 = 0$ possède deux solutions $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ avec $t_1 \neq t_2$. Déterminer $\mathbf{P}(A)$.

Solution : le trinôme du second degré $t^2 - 2Y(\omega)t + 1$ possède deux racines réelles distinctes si et seulement son discriminant $Y^2(\omega) - 1$ est > 0. On a donc $A = \{Y^2 > 1\}$. Comme $\{Y^2 > 1\} = \{X > 1\}$ et comme $\mathbf{P}(X > 1) = 1 - F_X(1) = e^{-\lambda}$, on a donc $\boxed{\mathbf{P}(A) = e^{-\lambda}.}$