Université de Rennes 1
Année 2017/2018

Licence 3

Probabilités – CC2 du 5/4/2018–Corrigé

Exercice 1 (7P.) Un livre de 100 pages contient 1000 erreurs, réparties aux hasard selon les pages. On ouvre le livre et on compte le nombre X d'erreurs contenues dans une page.
(i) Identifier la loi de X. Quelle est l'espérance de X? Quelle est sa variance?

On a $\boxed{X \sim \mathscr{B}(n,p)}$ avec $\boxed{n = 1000}$ et $\boxed{p = \frac{1}{100}}$; d'où $\boxed{\mathbf{E}(X) = np = 10 \text{ et } \mathrm{Var}(X) = npq = 9.9.}$

(ii) Donner une majoration de $\mathbf{P}(X \leq 20)$ au moyen l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On a

$$\{X \geq 20\} = \{X - 10 \geq 10\} = \{|X - 10| \geq 10\}$$

et, comme $\mathbf{E}(X) = 10$, on a donc par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geq 20) = \mathbf{P}(|X_n - \mathbf{E}(X)|) \geq 10 \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{10^2} = \frac{9.9}{100} = 0.099.}$$

(iii) Par quelle loi de Poisson peut-on approcher la loi de X?

Comme $n \geq 30$ et $p \leq 1/10$, on peut-on approcher la loi de X par la loi $\boxed{\mathscr{P}(\lambda) \text{ pour } \lambda = np = 10.}$

(iv) Donner, à l'aide de (iii), une valeur approchée de la probabilité qu'une page choisie au hasard contienne au plus une erreur.

On a $\boxed{\mathbf{P}(X \leq 1) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) \approx e^{\lambda}(1 + \lambda) = 11e^{-10} = 0.0005.}$

Exercice 2 (7P.) Soient X et Y deux v.a.r qui suivent des lois de Bernoulli, de paramètres 1/2 et 1/3 respectivement. On pose $a := \mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$.
(i) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) en fonction de a et présenter le résultat sous forme de tableau. A quelle condition doit satisfaire a?

La loi conjointe de (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

X/Y	1	0	P_X
1	a	$1/2 - a$	1/2
0	$1/3 - a$	$1/6 + a$	1/2
P_Y	1/3	2/3	1

On doit avoir $0 \leq a \leq 1, 0 \leq 1/2 - a \leq 1, 0 \leq 1/3 - a \leq 1$ et $0 \leq 1/6 + a \leq 1$; ceci équivaut à la condition $\boxed{0 \leq a \leq 1/3.}$

(ii) Montrer que XY est une v.a.r. de Bernoulli dont on identifiera le paramètre.

On a $XY(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc $XY \sim \mathscr{B}(p)$ pour $p \in [0, 1]$. Comme $\mathbf{P}(\{XY = 1\}) = \mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = a$, on a $p = a$, c-à-d $\boxed{XY \sim \mathscr{B}(a).}$

(iii) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$ en fonction de a.

On a $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$; comme $\mathbf{E}(XY) = a, \mathbf{E}(X) = 1/2$ et $\mathbf{E}(Y) = 1/3$, on a donc $\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = a - \frac{1}{6}.}$

(iv) On suppose que X et Y sont non corrélées. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Comme X et Y sont non corrélées, on a $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, c-à-d $a = 1/6$. Le tableau de la loi de (X,Y) est alors

X/Y	1	0	P_X
1	1/6	1/3	1/2
0	1/6	1/3	1/2
P_Y	1/3	2/3	1

On vérifie que $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = j)$ pour tout $i, j \in \{0,1\}$ (par exemple : $\mathbf{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 0)$). Ceci signifie que X et Y sont indépendantes.

Exercice 3 **(8P.)** Soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{x^4} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

On a : $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ et

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^{\infty} \frac{2}{x^4}dx = \frac{1}{3} + [-\frac{2}{3x^3}]_1^{\infty} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Donc f est bien une densité de probabilité.

(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X = 3)$ et $\mathbf{P}(\frac{1}{2} < X \le 2)$.

Comme X est une v.a.r continue on a $\boxed{\mathbf{P}(X = 3) = 0}$. On a

$$\boxed{\mathbf{P}(\frac{1}{2} < X \le 2) = \int_{1/2}^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^2 \frac{2}{x^4}dx = \frac{1}{6} + [-\frac{2}{3x^3}]_1^2 = \frac{3}{4}.}$$

(iii) Montrer que X possède une espérance et la calculer.

On a $|xf(x)| \sim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3}$. Comme $x \to \frac{2}{x^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, l'espérance de X existe. On a

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbf{R}} xf(x)dx = \int_{1/2}^1 \frac{x}{3}dx + \int_1^2 \frac{2}{x^3}dx = [\frac{x^2}{6}]_0^1 + [-\frac{1}{x^2}]_1^{\infty} = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}.}$$

(iv) Montrer que X possède une variance et la calculer.

On a $|x^2 f(x)| \sim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2}$. Comme $x \to \frac{2}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, la variance de X existe. On a

$$\mathbf{E}(X^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)dx = \int_{1/2}^1 \frac{x^2}{3}dx + \int_1^2 \frac{2}{x^2}dx = [\frac{x^3}{9}]_0^1 + [-\frac{2}{x}]_1^{\infty} = \frac{1}{9} + 2 = \frac{19}{9}$$

et donc (formule de KoenigHuygens)

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(x)^2 = \frac{19}{9} - \frac{49}{36} = \frac{3}{4}.}$$

(v) Soit $Y = X^3$. Identifier la loi de Y.

Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(X^3 \leq y) = \mathbf{P}(X \leq y^{1/3}) = \int_0^{y^{1/3}} f(t)\,dt;$$

en particulier, on a $\mathbf{P}(Y \leq y) = 0$ pour $y < 0$.
Soit $y \geq 0$. Avec le changement de variable

$$t = s^{1/3}, \quad dt = \frac{1}{3s^{2/3}}\,ds,$$

on a

$$\mathbf{P}(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(s^{1/3})\,\frac{1}{3s^{2/3}}\,ds.$$

Pour $0 \leq y < 1$, on a donc

$$\mathbf{P}(Y \leq y) = \int_0^y \frac{1}{9s^{2/3}}\,ds$$

et pour $y \geq 1$

$$\mathbf{P}(Y \leq y) = \int_0^1 \frac{1}{9s^{2/3}}\,ds + \int_1^y \frac{2}{s^{4/3}}\,\frac{1}{3s^{2/3}}\,ds = \int_0^1 \frac{1}{9s^{2/3}}\,ds + \int_1^y \frac{2}{3s^2}\,ds.$$

Donc Y est une v.a.r. continue de densité g, donnée par

$$\boxed{g(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ 1/(9s^{2/3}) & \text{si } 0 \leq s < 1 \\ 2/(3s^2) & \text{si } s \geq 1 \end{cases}}$$
