Université de Rennes 1
Année 2015/2016

Licence 2-3

Probabilités – CC1 du 25/2/2016

NOM, prénom :

Exercice 1 (4P.) Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A et B des évènements dans $\mathscr{F}$ tels que $\mathbf{P}(A) > 0, \mathbf{P}(B) > 0$ et $A \cap B = \emptyset$.
(i) Montrer que A et B ne sont pas indépendants.

Solution : Comme $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) > 0$ (car $\mathbf{P}(A) > 0$ et $\mathbf{P}(B) > 0$), on a $\mathbf{P}(A\cap B) \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ et A et B ne sont pas indépendants.

(ii) Montrer que A n'est pas indépendant avec lui-même.

Solution : Supposons, par l'absurde que A est indépendant avec lui-même, c-à-d $\mathbf{P}(A\cap A) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(A)$. Comme $A\cap A = A$, on a alors $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A)^2$. D'où $\mathbf{P}(A) = 0$ ou $\mathbf{P}(A) = 1$. Comme, par hypothèse, $\mathbf{P}(A) > 0$ on a donc $\mathbf{P}(A) = 1$. Alors $\mathbf{P}(A^c) = 0$. Or, par hypothèse, $B \subset A^c$. Ainsi $\mathbf{P}(B) = 0$ et ceci contredit le fait que $\mathbf{P}(B) > 0$.

Exercice 2 (7P.) On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs de la façon suivante : on tire une boule de l'urne, on la remet en y ajoutant une boule de la même couleur que la boule qui a été tirée. Pour $k \geq 1$, on considère les évènements

N_k : “une boule noire apparaît au k-ième tirage"

A_k : “une boule blanche apparaît pour la 1ère fois au k-ième tirage"

(i) Calculer les probabilités de A_1 et N_1.

Solution : On a $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(N_1) = \frac{1}{2}$.

(ii) Soit $k \geq 2$. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(N_k | N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1})$ et $\mathbf{P}(N_k^c | N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1})$

Solution : $N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}$ est l'événement “les $k-1$ premiers tirages ont donné des boules noires" ; si cet évènement s'est réalisé, il y a k boules noires et 1 boule blanche dans l'urne. Sachant cet évènement, la probabilité d'obtenir une boule noire lors du k-ième tirage est donc $\boxed{\mathbf{P}(N_k | N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}) = \frac{k}{k+1}}$

et celle d'obtenir une boule blanche est $\boxed{\mathbf{P}(N_k^c | N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}) = \mathbf{P}(A_k | N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}) = \frac{1}{k+1}}$.

(iii) Soit $n \geq 1$. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(A_n)$.

Solution : En utilisant (ii), on a $\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(N_k^c) = \mathbf{P}(N_n^c | N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1})\mathbf{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1}) = \frac{1}{n+1}\mathbf{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1})$. En posant $p_{n-1} = \mathbf{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1})$, on a en utilisant (ii) : $p_n = \mathbf{P}(N_{n-1} | N_1 \cap \cdots \cap N_{n-2})\mathbf{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-2}) = \frac{n-1}{n} p_{n-2}$, D'où, $p_{n-1} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{n}$ car $p_1 = 1/2$. Donc $\boxed{\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{n(n+1)}}$.

Exercice 3 (12P.) Au poker, une **main** désigne un ensemble de 5 cartes piochées dans un paquet de 52 cartes.

Il y a 4 **couleurs** (pique-coeur-carreau-trêfle) et 13 **hauteurs** consécutives (as-roi-dame-valet-dix-neuf-huit-sept-six-cinq-quatre-trois-deux).

On se propose de calculer les probabilités de piocher certaines combinaisons classiques au poker.

(i) Modéliser l'expérience aléatoire par un espace probabilisé adéquat. Quelle est le nombre total de mains ?

Solution : Ω est l'ensemble des 5-combinaisons dans un ensemble à 52 éléments, muni de la tribu $\mathbf{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme : $\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\binom{52}{5}} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{2589960}$ pour tout $A \subset \Omega$.

(ii) Une **quinteflush** est une main constituée de 5 cartes de même couleur et de hauteurs consécutives (i.e. as-roi-dame-valet-dix de pique ou as-roi-dame-valet-dix de coeur etc...). Quelle est la probabilité d'obtenir une quinteflush ?

Solution : Pour réaliser l'évènement A :"la main est une quinteflush", il y a 4 choix possibles de couleur et, la couleur choisie, 13-4=9 choix possibles de hauteur maximale et donc $\boxed{\mathrm{Card}(A) = 4 \times 9 = 36, \mathbf{P}(A) = \frac{36}{2589960}}$.

(iii) Un **carré** est une main constituée de 4 cartes de même hauteur (i.e. 4 as, 4 rois etc...) et d'une cinquième carte. Quelle est la probabilité de piocher un carré ?

Solution : Pour réaliser l'évènement A :"la main est un carré", il y a 13 choix possibles de hauteur et, la hauteur choisie (et donc les 4 premières cartes choisies), 52-4=48 choix possibles de la 5e carte et donc $\boxed{\mathrm{Card}(A) = 13 \times 48 = 624, \mathbf{P}(A) = \frac{624}{2589960}}$.

(iv) Un **full** est une main constituée de 3 cartes de même hauteur et de deux cartes de même hauteur. Quelle est la probabilité de piocher un full ?

Solution : Pour réaliser l'évènement A :"la main est un full", il y a 13 choix possibles de la 1e hauteur ; la 1e hauteur choisie, il y a $\binom{4}{3} = 4$ choix des couleurs des 3 cartes dans cette hauteur. Ces 3 cartes choisies, il y a 13-1=12 choix possibles de la 2e hauteur ; la 2e hauteur choisie, il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix des couleurs des 2 dernières cartes dans cette hauteur. On a donc $\boxed{\mathrm{Card}(A) = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744, \mathbf{P}(A) = \frac{3744}{2589960}}$.

(v) Une **couleur** est constituée de 5 cartes de même couleur et qui n'est pas une quinteflush. Quelle est la probabilité de piocher une couleur ?

Solution : Soit A l'évènement :"la main est une couleur" et B l'évènement :"la main est constituée de 5 cartes de même couleur". Pour réaliser B, il y a 4 choix possibles de la couleur ; la couleur choisie, il y a $\binom{13}{5}$ choix possibles des 5 cartes dans cette couleur. On a donc $\mathrm{Card}(B) = 4 \times \binom{13}{5} = 5148$. Avec (ii), on a $\boxed{\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) - 36 = 5112,\ \mathbf{P}(A) = \frac{5112}{2589960}}$.

(vi) Une **suite** est une main constituée de 5 cartes de hauteurs consécutives (i.e. as, roi, dame, valet, dix etc..) et qui n'est pas une quinteflush. Quelle est la probabilité de piocher une suite ?

Solution : Soit A l'évènement :"la main est une suite" et B l'évènement :"la main est constituée de 5 cartes de hauteurs consécutives". Pour réaliser B, il y a 9 choix possibles de la hauteur maximale ; la hauteur choisie, il y a $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ choix possibles des couleurs des 5 cartes. On a donc $\mathrm{Card}(B) = 9 \times 4^5 = 9216$. Avec (ii), on a $\boxed{\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) - 36 = 9180,\ \mathbf{P}(A) = \frac{9180}{2589960}}$.