Séries de Fourier

Bachir Bekka

Prépa Agreg, Compléments de cours, 2021

Plan

1. I. Convolution sur le circle unité
2. II. Séries de Fourier
3. III. Théorie L^2 des séries de Fourier
4. IV. Quelques liens entre analyse complexe et séries de Fourier
5. V. Quelques applications des séries de Fourier

Quelques dates et quelques acteurs

- Fourier 1820 : introduction des séries de Fourier dans le traité "Théorie Analytique de la Chaleur"
- Dirichlet 1829 : démonstration du théorème qui porte son nom
- Poisson 1830 : introduction et étude du noyau de Poisson
- Dubois-Raymond 1873 : construction d'une fonction continue avec série de Fourier divergente
- Fejer 1900 : démonstration du théorème qui porte son nom

Préliminaires sur le cercle unité

Soit

$$\boxed{\mathbf{S}^1 := \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}}.$$

Alors

- $\mathbf{S}^1$ est un groupe abélien
- $\mathbf{S}^1$ est un espace métrique pour la distance $d(\theta_1 + 2\pi\mathbf{Z}, \theta_2 + 2\pi\mathbf{Z}) = \min\{|\theta_1 - \theta_2 + 2n\pi| : n \in \mathbf{Z}\}$
- $\mathbf{S}^1$ est un groupe topologique **compact**.

En fait,

$$\mathbf{U} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\} \to \mathbf{S}^1, e^{2\pi i\theta} \mapsto \theta + 2\pi\mathbf{Z}$$

est un isomorphisme de groupes et un homéomorphisme.

Soit $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C}$ une fonction. Alors il existe une unique fonction

$$\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$$

qui est 2π**-périodique** et telle que $f \circ p = \widetilde{f}$, où $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est l'application quotient.

Fonctions sur le cercle unité

Soit $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C}$ une fonction et $\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la fonction correspondante. Alors

- f est continue $\Leftrightarrow \widetilde{f}$ est continue.
- f est de classe $C^k \underset{\text{définition}}{\Leftrightarrow} \widetilde{f}$ est de classe C^k pour $k \in \mathbf{N}$.
- Pour θ_1, θ_2 avec $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$, on définit

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) d\theta := \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \widetilde{f}(x) dx;$$

  en particulier,

$$\int_{\mathbf{S}^1} f(\theta) d\theta := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(x) dx.$$

On **identifiera** $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C}$ avec la fonction 2π-périodique $\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$.

Espaces L^p sur le cercle

Pour $p \in [1, +\infty[$, soit

$$L^p(\mathbf{S}^1) = \{f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C} : f \text{ mesurable et } L^p - \text{intégrable}\}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_p$ pour laquelle

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbf{S}^1} |f(x)|^p dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx.$$

On définit également

$$L^\infty(\mathbf{S}^1) = \{f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C} : f \text{ mesurable et bornée presque partout }\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \mathrm{sup.ess.}|f| = \inf\{K : |f| \leq K \text{ presque partout }\}.$$

Remarques

- On a
$$C(\mathbf{S}^1) \subset L^\infty(\mathbf{S}^1) \subset L^p(\mathbf{S}^1) \subset L^q(\mathbf{S}^1) \subset L^1(\mathbf{S}^1),$$
pour tous $q \leq p$.

  Preuve : Le fait que $L^p(\mathbf{S}^1) \subset L^q(\mathbf{S}^1)$ découle du fait que $\mathbf{1}_{\mathbf{S}^1}$ est intégrable.

- Pour $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $a \in \mathbf{R}$, on a $\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)dx$.

  Preuve : Comme $\int_a^{a+2\pi} f = \int_a^0 f + \int_0^{2\pi} f + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f = -\int_0^a f + \int_0^{2\pi} f + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f$, il suffit de montrer que $\int_{2\pi}^{a+2\pi} f = \int_0^a f$.

  C'est le cas : $\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx \underset{[t=x-2\pi]}{=} \int_0^a f(t+2\pi)dt = \int_0^a f(t)dt$, par 2π-périodicité de f.

- Pour $a \in \mathbf{R}$ et $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$, soit $\tau_a f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C}$ définie par $\tau_a f(x) = f(a+x)$. On a : $\tau_a f \in L^p(\mathbf{S}^1)$ et $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$.

  Preuve : Le fait que $\tau_a f$ est 2π-périodique est évident ; on a

  $\int_0^{2\pi} \tau_a f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x+a)dx \underset{[t=x+a]}{=} \int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt.$

Continuité des translations

Proposition 1

Soit $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors

- $\lim_{a \to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$;
- l'application $\mathbf{R} \to L^p(\mathbf{S}^1), x \mapsto \tau_x f$ est continue.

Preuve : Comme $\|\tau_{a+x} f - \tau_x f\|_p = \|\tau_x(\tau_a f - f)\|_p = \|\tau_a f - f\|_p$, il suffit de montrer la 1ère assertion. Comme $C(\mathbf{S}^1)$ est dense dans $L^p(\mathbf{S}^1)$ et que τ_a est isométrique, il suffit considérer le cas où $f \in C(\mathbf{S}^1)$. On a

$\|\tau_a f - f\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+a) - f(x)|^p dx \leq \sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x+a) - f(x)|^p$; l'assertion découle de la continuité uniforme de f.

Convolution sur le cercle

Soient $f, g \in L^1(\mathbf{S}^1)$.

Proposition 3

La fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est dans $L^1(\mathbf{S}^1)$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}$.

Preuve : comme f et g sont intégrables sur $[0, 2\pi]$, la fonction $(x,t) \mapsto f(x-t)g(t)$ est integrable sur $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$. L'assertion découle alors du théorème de Fubini.

Définition

Soient $f, g \in L^1(\mathbf{S}^1)$. Le **produit de convolution** $f * g : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C}$ est défini par

$$\boxed{f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt}$$

On observe que ce produit est commutatif : $f * g = g * f$, car

$\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt \underset{u=x-t}{=} -\int_x^{x-2\pi} f(u)g(x-u)du = \int_0^{2\pi} f(u)g(x-u)du.$

Quelques propriétés du produit de convolution

Proposition 4

Soient $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $g \in L^p(\mathbf{S}^1)$ pour $p \in [1, +\infty]$. Alors

- $f * g \in L^p(\mathbf{S}^1)$.
- $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Preuve : Le cas $p = +\infty$ étant évident, on peut supposer que $p < +\infty$. Par homogénéité, on peut aussi supposer que $\|f\|_1 = 1$. Par l'inégalité de Jensen, on a alors $(\int_0^{2\pi} |f(x-t)||g(t)|dt)^p \leq \int_0^{2\pi} |f(x-t)||g(t)|^p dt$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f*g(x)|^p dx \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(x-t)||g(t)|dt\right)^p dx &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-t)||g(t)|^p dt\\ &\underset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}|f(x)|dx\int_0^{2\pi}|g(t)|^p dt\\ &= \|f\|_1\|g\|_p^p.\end{aligned}$$

Quelques propriétés du produit de convolution

Corollaire

$L^1(\mathbf{S}^1)$ est une algèbre pour le produit de convolution et on a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ pour tout $f, g \in L^1(\mathbf{S}^1)$. (On dit que $L^1(\mathbf{S}^1)$ est une **algèbre de Banach** commutative.)

Remarque

Soient $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $g \in L^\infty(\mathbf{S}^1)$. Alors $f * g \in C(\mathbf{S}^1)$.

Preuve : On a $\|\tau_a(f * g) - f * g\|_\infty = \|(\tau_a f - f) * g\|_\infty \leq \|\tau_a f - f\|_1 \|g\|_\infty \to_{a \to 0} 0$.

Coefficients de Fourier

Définition

Soit $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on définit le **n-ième coefficient de Fourier** $c_n(f)$ de f par

$$\boxed{c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt}.$$

Quelques régles de calcul sur les coefficients de Fourier

On définit $e_n \in C(\mathbf{S}^1)$ par $e_n(t) = e^{int}$.

Proposition 5

Soient $f, g \in L^1(\mathbf{S}^1), a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$. Alors

(1) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ où $\check{f}(t) = f(-t)$.

(2) $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

(3) $c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$

(4) $f * e_n = c_n(f) e_n$

(5) si f est continue et C^1 par morceaux, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

(6) $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$.

Preuve : Vérifications immédiates ; par exemple, pour (5) : écrivons $[0, 2\pi] = \cup_{j=0}^{l-1} [a_j, a_{j+1}]$ avec $0 = a_0 < a_1 < \cdots a_l = 2\pi$ et f C^1 sur $[a_j, a_{j+1}]$. On a $\int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t) e^{-int} dt \underset{IPP}{=} [f(t) e^{-int}]_{a_j}^{a_{j+1}} + in \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) e^{-int} dt$ et donc

$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-int}]_{0j}^{2\pi} + inc_n(f) = inc_n(f)$.

Lemme de Riemann-Lebesgue

Théorème 1 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soient $a < b$ et $f \in L^1([a,b])$. Alors, on a

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

ainsi que $\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$ et $\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$

Preuve : Il suffit de montrer la première formule.
Soit $\lambda_n \in \mathbf{R}$ avec $|\lambda_n| \to +\infty$. On définit des formes linéaires

$$\varphi_n : L^1([a,b]) \to \mathbf{C}, \quad f \mapsto \int_a^b f(t) e^{i\lambda_n t} dt.$$

On a $|\varphi_n(f)| \leq \|f\|_1$ pour tout $f \in L^1([a,b])$ et donc $\|\varphi_n\| \leq 1$.
Soit $I = [c,d]$ avec $I \subset [a,b]$. Alors

$$\varphi_n(\mathbf{1}_I) = \int_c^d e^{i\lambda_n t} dt = \frac{e^{i\lambda_n d} - e^{i\lambda_n c}}{i\lambda_n(d-c)}$$

et donc $|\varphi_n(\mathbf{1}_I)| \leq 2/|\lambda_n|(d-c)$. D'où :$|\varphi_n(\mathbf{1}_I)| \to_{n \to +\infty} 0$.
Or $\mathrm{Vect}\{\mathbf{1}_I : I \subset [a,b]\}$ est dense dans $L^1([a,b])$ et $\sup_n \|\varphi_n\| \leq 1$. Il s'ensuit que $|\varphi_n(f)| \to_{n \to +\infty} 0$, pour tout $f \in L^1([a,b])$.

Coefficients de Fourier et homomorphisme d'algèbres

On note

$$c_0(\mathbf{Z}) := \{(u_n)_{n\in\mathbf{Z}} : \lim_{|n|\to+\infty} u_n = 0\}.$$

C'est une algèbre pour le produit usuel de suites ; on munit $c_0(\mathbf{Z})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{Z}} |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$.
Pour $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$, on définit $\gamma(f) := (c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$.

Proposition 7

- $\gamma : f \mapsto \gamma(f)$ est un homomorphisme d'algèbres entre $L^1(\mathbf{S}^1)$ et $c_0(\mathbf{Z})$
- γ est continue et $\|\gamma\| = 1$.

Preuve : Le fait que $\gamma(f) \in c_0(\mathbf{Z})$ découle du Lemme de Riemann-Lebesgue. La linéarité de γ est claire. Le fait que $\gamma(f*g) = \gamma(f)\gamma(g)$ pour $f, g \in L^1(\mathbf{S}^1)$ est une conséquence de la Proposition 5 (6).

Comme $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$, il est clair que $\|\gamma\| \leq 1$. Pour $f = \mathbf{1}_{\mathbf{S}^1}$, on a $c_0(f) = 1$, donc $\|\gamma(f)\| \geq 1$ et il s'ensuit que $\|\gamma\| = 1$.

Remarque : Nous verrons plus tard que l'homomorphisme $\gamma : L^1(\mathbf{S}^1) \to c_0(\mathbf{Z})$ est injectif mais n'est **pas** surjectif.

Unités approchées dans $L^1(\mathbf{S}^1)$

Proposition 6

$L^1(\mathbf{S}^1)$ ne possède pas d'élément unité.

Preuve : Supposons, par l'absurde, que $L^1(\mathbf{S}^1)$ possède un élément unité $f_0 \in L^1(\mathbf{S}^1)$. Alors, pour tout $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$, on a $f_0 * f = f$ et donc $c_n(f_0)c_n(f) = c_n(f)$, c-à-d $(c_n(f_0) - 1)c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Pour $f = e_m$, on a $c_n(f) = \delta_{mn}$ (symbole de Kronecker) et il s'ensuit que $c_n(f_0) = 1$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Ceci contredit le Lemme de Riemann-Lebesgue.

Par contre, $L^1(\mathbf{S}^1)$ possède des unités approchées.

Définition

Une **unité approchée** dans $L^1(\mathbf{S}^1)$ est une suite $(f_N)_{N\geq 1}$ dans $L^1(\mathbf{S}^1)$ avec les propriétés suivantes :

(U1) $f_N(t) \geq 0$, pour tout $t \in \mathbf{S}^1$ et $N \geq 1$;

(U2) $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)dt = 1$ pour tout $N \geq 1$;

(U3) pour tout $\delta > 0$, on a $\lim_{N\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} f_N(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} f_N(t)dt\right) = 0$.

De l 'utilité des unités approchées.

La proposition suivante est le résultat-clé sur les unités approchées.

Proposition 7

Soit $(f_N)_{N\geq 1}$ une unité approchée dans $L^1(\mathbf{S}^1)$. Alors

- pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$, on a $\|f_N * f - f\|_p \to_{N\to\infty} 0$;
- tout $f \in C(\mathbf{S}^1)$, on a $\|f_N * f - f\|_\infty \to_{N\to\infty} 0$.

Preuve : Pour tout $x \in \mathbf{S}^1$, on a $(f_N * f - f)(x) \underset{(U2)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)[f(x-t) - f(x)]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)(\tau_{-t}f - f)(x)dt$; d'où

$2\pi\|f_N * f - f\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)(\tau_{-t}f - f)(x)dt\right|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)|\tau_{-t}f - f)(x)|dt\right)^p dx \underset{\text{Jensen}}{\leq}$
$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)|\tau_{-t}f - f)(x)|^p dtdx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)\|\tau_{-t}f - f\|_p^p dt.$

Soit $\varepsilon > 0$. Par la continuité de $t \mapsto \tau_{-t}f$ (Proposition 1), il existe $\delta > 0$ tel que $\|\tau_{-t}f - f\|_p^p < \varepsilon$ pour tout $|t| < \delta$. Par $(U3)$, il existe N_0 tel que $\int_{-\pi}^{-\delta} f_N(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} f_N(t)dt \leq \varepsilon$ pour tout $N \geq N_0$. On a alors, pour tout $N \geq N_0$,

$$2\pi\|f_N * f - f\|_p^p \leq \int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{2\pi}f_N(t)\|\tau_{-t}f - f\|_p^p dt + \int_{\delta<|t|\leq\pi}\frac{1}{2\pi}f_N(t)\|\tau_{-t}f - f\|_p^p dt \leq \varepsilon + 2^p\varepsilon\|f\|_p^p.$$

Ceci montre que $\|f_N * f - f\|_p \to_{N\to\infty} 0$.

De même, si $f \in C(\mathbf{S}^1)$, on montre en utilisant la continuité uniforme de f que $\|f_N * f - f\|_\infty \to_{N\to\infty} 0$.

Une remarque

Remarque

Il est facile de construire des unités approchées : pour $N \geq 1$, soit f_N la fonction 2π-périodique sur $\mathbf{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f_N(x) = \begin{cases} \pi N & \text{si} \;\; x \in [-1/N, 1/N] \\ 0 & \text{si} \;\; x \in [-\pi, \pi] \setminus [-1/N, 1/N] \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que $(f_N)_N$ est une unité approchée de $L^1(\mathbf{S}^1)$.

Noyaux

Soit $f_0 \in L^1(\mathbf{S}^1)$. Alors f_0 définit un opérateur linéaire $C_{f_0} : L^p(\mathbf{S}^1) \to L^p(\mathbf{S}^1)$ donné par la convolution avec f_0 :

$$\forall f \in L^p(\mathbf{S}^1) : C_{f_0}(f) = f_0 * f.$$

L'opérateur C_{f_0} est continu de norme $\leq \|f_0\|_1$. On dit que f_0 est le **noyau** de l'opérateur C_{f_0}; en fait, le noyau de C_{f_0} est plutôt la fonction $(x, t) \mapsto f_0(x - t)$ définie sur le produit cartésien $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ et C_{f_0} est l'opérateur intégral correspondant.

On note

$$\mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1) := \mathrm{Vect}\{e_n : n \in \mathbf{Z}\},$$

l'espace des **polynômes trigonométriques**.

Proposition 8

- $\mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1)$ est un idéal de $L^1(\mathbf{S}^1)$.
- Supposons que $\mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1)$ contient une unité approché $(f_N)_N$ pour $L^1(\mathbf{S}^1)$. Soit $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$ pour $p \in [1, +\infty[$ ou bien $f \in C(\mathbf{S}^1)$). Alors $f_N * f \in \mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1)$ et $\|f_N * f - f\|_p \to_{N\to\infty} 0$ ou bien $\|f_N * f - f\|_\infty \to_{N\to\infty} 0$; en particulier $\mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1)$ est dense dans $L^p(\mathbf{S}^1)$ (pour la norme $\|\cdot\|_p$) et dans $C(\mathbf{S}^1)$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$)

Preuve : La première assertion découle du fait que, pour tout $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $n \in \mathbf{Z}$, on a $f * e_n = c_n(f)e_n$ (Proposition 5).

La deuxième assertion découle de la première et de la Proposition 9.

Noyau de Dirichlet et série de Fourier

Définition

- Pour un entier $N \geq 0$, soit
$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n \in \mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1),$$
le **noyau de Dirichlet.**
- Pour $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $N \geq 0$, on note
$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{int}, t \in \mathbf{S}^1,$$
la N-ième somme partielle de la **série de Fourier de** f.

Noyaux de Dirichlet et séries de Fourier

Question fondamentale

Peut on reconstituer f (disons continue) à partir de sa série de Fourier $S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{int}$; en d'autres termes : a-t-on $f = S(f)$?

Il y a un lien simple mais basique entre D_N est S_N.

Proposition 9

Pour $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $N \geq 0$, on a

$$\boxed{S_N(f) = D_N * f.}$$

Preuve : $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n = \sum_{n=-N}^{N} f * e_n = f * D_N = D_N * f$.

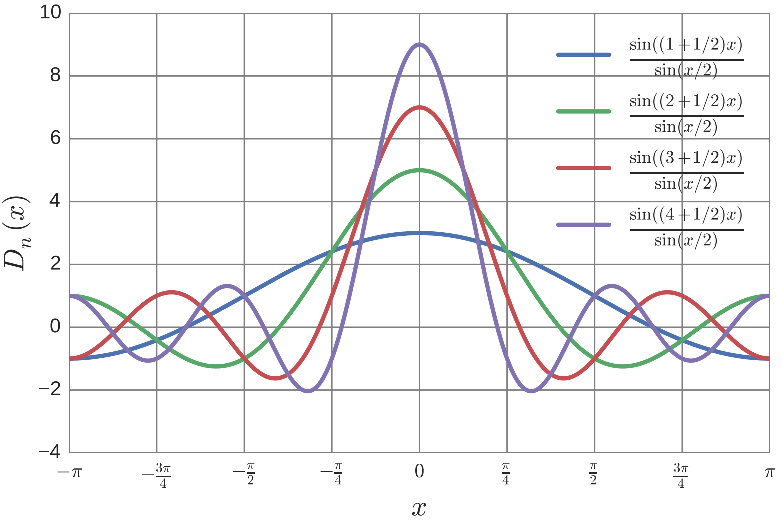
Quelques propriétés du noyau de Dirichlet

La vie serait parfaite, si les D_N formaient une unité approchée de $L^1(\mathbf{S}^1)$. Ce n'est malheureusement pas le cas....

Proposition 10

- D_N est pair ;
- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1$;
- $D_N(x) = \dfrac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin(\frac{x}{2})}$ pour tout $x \neq 0$ et $D_N(0)) = 2N+1$.
- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|dt \geq \dfrac{4}{\pi^2}\ln(N)$.

Quelques propriétés du noyau de Dirichlet



Quelques propriétés du noyau de Dirichlet : preuves

(1) et (2) sont immédiats.
(3) Il est clair que $D_N(0) = 2N + 1$. Soit $x \in [-\pi, \pi], x \neq 0$. Alors, comme $e^{ix} \neq 1$, on a

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} = e^{-iNx} \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x-1}}{e^{ix} - 1} = e^{-iNx} \frac{e^{iNx}\left(e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)} \\
&= e^{-ix/2} \frac{\left(e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}\right)}{\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)} = \frac{e^{i(N+1/2)x} - e^{-i(N+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\
&= \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Quelques propriétés du noyau de Dirichlet : preuves

(4) En utilisant la parité de D_N et fait que $\sin y \leq y$ pour $0 \leq y \leq \pi$, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|D_N(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt \\
&\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t}\right|dt \underset{[x=(N+(1/2))t]}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+(1/2))\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx \\
&\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{N\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|dx = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \geq \frac{4}{\pi^2}\log N.
\end{aligned}
$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|dx = \int_0^{\pi}\sin x dx = 2$.

Un corollaire important

On observe que la Proposition précédente montre que $\|D_N\|_1 \to_{N\to\infty} +\infty$. Voici une conséquence importante de ce fait.

Corollaire

Il existe une fonction $f \in C(\mathbf{S}^1)$ telle que $\sup_{n\geq 0} |S_N(f)(0)| = +\infty$; en particulier, $(S_N(f)(0))_N$ est divergente.

Preuve : On considère la forme linéaire $\varphi_N : C(\mathbf{S}^1) \to \mathbf{C}$ donnée par

$$\varphi_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)f(t)dt = D_N * f(0) = S_N(f)(0).$$

Comme $\|D_N * f\|_\infty \leq \|D_N\|_1\|f\|_\infty$, φ_N est continue sur $(C(\mathbf{S}^1), \|\cdot\|_\infty)$ et $\|\varphi_N\| \leq \|D_N\|_1$.
Posons $f_n = D_N/(\frac{1}{n} + |D_N|)$. Alors $f_n \in C(\mathbf{S}^1)$ et $\|f_n\|_\infty \leq 1$. De plus, $\varphi_N(f_n) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|^2/(\frac{1}{n} + |D_N(t)|)dt$ et donc $\varphi_N(f_n) \to_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|dt = \|D_N\|_1$. Il s'ensuit que $\|\varphi_N\| = \|D_N\|_1$.
Supposons par l'absurde que $(\varphi_N(f))_N$ est bornée pour tout $f \in C(\mathbf{S}^1)$. Alors, par le Théorème de Banach-Steinhaus, la suite $(\|\varphi_N\|)_N$ est bornée. Comme $\|\varphi_N\| = \|D_N\|_1 \to_{N\to\infty} +\infty$, ceci est une contradiction.

Theorème 2 (Théorème de Dirichlet)

Soit $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C}$ continue par morceaux et $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{h\to 0, h>0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0+)}{h}$ et $\lim_{h\to 0, h>0} \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0-)}{h}$ existent. Alors $S_N(f)$ converge en x_0 et

$$S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2}\,[f(x_0+)+f(x_0-)].$$

Preuve : Soit $g := \tau_{x_0} f$. Alors $g(0^+) = f(x_0^+), g(0^-) = f(x_0^-)$, $\lim_{h\to 0, h>0} \dfrac{g(h)-g(0+)}{h}$ et $\lim_{h\to 0, h>0} \dfrac{g(-h)-g(0^-)}{h}$ existent et $S_N g(0) = S_N f(x_0)$ pour tout N. On peut donc supposer que $x_0 = 0$.
Comme $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1$ et comme D_N est pair, on a $\dfrac{f(0+)}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(0+)D_N(x)dx$; il s'ensuit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)D_N(x)dx - \frac{f(0+)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x)-f(0^+))D_N(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x)-f(0^+)}{x}\,\frac{x}{\sin(\frac{x}{2})}\sin[(N+\frac{1}{2})x]dx.$$

Par hypothèse sur f, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(0^+)}{x}\,\dfrac{x}{\sin(\frac{x}{2})}$ se prolonge en une fonction continue φ sur $[0,\pi]$. On a donc $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)D_N(x)dx - \dfrac{f(0+)}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin[(N+\frac{1}{2})x]dx$ et il découle du Lemme de Riemann-Lebesgue que $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)D_N(x)dx \to_{N\to\infty} \dfrac{f(0+)}{2}$. On démontre de manière similaire que $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)D_N(x)dx \to_{N\to\infty} \dfrac{f(0-)}{2}$.

Noyaux de Fejer

Définition

Pour un entier $N \geq 0$, soit

$$F_N = \frac{1}{N+1}(D_0 + \cdots + D_N) \in \mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1),$$

le **noyau de Fejer**.

Le N-ième noyau de Fejer est donc la moyenne arithmétique des $N+1$ premiers noyaux de Dirichlet. Les noyaux de Fejer ont l'avantage de former une unité approchée de $L^1(\mathbf{S}^1)$.

Quelques propriétés du noyau de Fejer

Proposition 13

(1) Pour tout $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$, on a : $F_N * f = \dfrac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)$;

(2) $\dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)dt = 1$;

(3) $F_N(x) = \dfrac{1}{N+1} \left(\dfrac{\sin \frac{(N+1)x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2$ pour tout $x \neq 0$ et $F_N(0)) = N+1$. En particulier, $F_N \geq 0$;

(4) pour tout $\delta > 0$, on a $\lim_{N \to \infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} F_N(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} F_N(t)dt \right) = 0$.

Quelques propriétés du noyau de Fejer : preuves

(1) est évident car $D_N * f = S_N(f)$.

(2) On a $(N+1)\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)dx = \dfrac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = N+1$.

(3) On a $F_N(0) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(0) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} 2n+1 = N+1$.

Soit $x \neq 0$. Alors

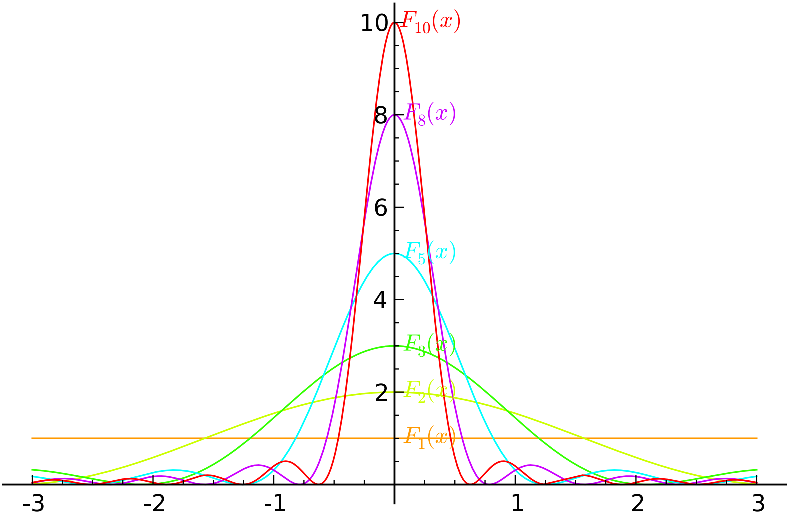
$\sum_{n=0}^{N} D_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{i(n+\frac{1}{2})x}\right) =$
$\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{Im}\left(e^{ix/2}\frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix/2}e^{i(N+1)x/2}2i\sin((N+1)x/2)}{e^{ix/2}2i\sin(x/2)}\right) =$
$\frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{Im}(e^{i(N+1)x/2}) = \left(\frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$.

(4) Pour $\delta < |x| \leq \pi$, on a avec (2),

$$F_N(x) \leq \frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 \leq \frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\right)^2$$

et donc $\sup_{\delta<|x|\leq\pi} F_N(x) \to_{N\to\infty} 0$. D'où $\int_{\delta<|x|\leq\pi} F_N(x)dx \to_{N\to\infty} 0$.

Quelques propriétés du noyau de Fejer



Theorème 3 (Théorème de Fejer)

- Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$, on a $\|F_N * f - f\|_p \to_{N\to\infty} 0$;
- Pour tout $f \in C(\mathbf{S}^1)$, on a $\|F_N * f - f\|_\infty \to_{N\to\infty} 0$.

Preuve : Par la Proposition 13, $(F_N)_N$ est une unité approchée de $L^1(\mathbf{S}^1)$; l'assertion découle donc immédiatement de la Proposition 5.

Quelques conséquences du Théorème de Fejer

On rappelle que $\mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1) = \mathrm{Vect}\{e_n \; n \in \mathbf{Z}\}$ est l'algèbre des polynômes trigonométriques.

Corollaire 1

- $\mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1) = \mathrm{Vect}\{e_n \; n \in \mathbf{Z}\}$ est dense $C(\mathbf{S}^1)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- $\mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1) = \mathrm{Vect}\{e_n \; n \in \mathbf{Z}\}$ dans $L^p(\mathbf{S}^1)$ pour la norme L^p, pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Preuve : On a $F_N \in \mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1)$ pour tout N et donc (Proposition 8) $F_N * f \in \mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1)$ pour tout $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$. L'assertion découle alors du Théorème de Fejer.

Quelques conséquences du Théorème de Fejer

On rappelle que $\gamma : L^1(\mathbf{S}^1) \to c_0(\mathbf{Z})$ est l'homomorphisme d'algèbres donné par $\gamma(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$.

Corollaire 2

$\gamma : L^1(\mathbf{S}^1) \to c_0(\mathbf{Z})$ est *injectif*.

Preuve : Soit $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ tel que $\gamma(f) = 0$, c-à-d $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Alors $S_N f = D_N * f = 0$ et donc

$F_N * f = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N * f = 0$ pour tout N. On a donc $f = 0$ par le Théorème de Fejer.

Une remarque

Remarque

L'homomorphisme $\gamma : L^1(\mathbf{S}^1) \to c_0(\mathbf{Z})$ n'est *pas surjectif*.

Preuve : Supposons, par l'absurde, que γ est surjectif. Alors, γ est bijective, par ce qui précède. Comme $c_0(\mathbf{Z})$ est un espace de Banach, $\gamma^{-1} : c_0(\mathbf{Z}) \to L^1(\mathbf{S}^1)$ est continue, par le Théorème des isomorphismes de Banach. Ceci signifie qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall f \in L^1(\mathbf{S}^1) : \|f\|_1 \leq C\|\gamma(f)\|_\infty = C \sup_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|.$$

Ceci est absurde : d'une part, on a $\|D_N\|_1 \to_{N\to\infty} +\infty$; d'autre part, $c_n(D_N) = 1$ si $-N \leq n \leq N$ et $c_n(D_N) = 0$ sinon de sorte que $\|\gamma(D_N)\|_\infty = 1$.

Le Théorème de Weiestrass comme conséquence du Théorème de Fejer

Theorème 4 **(Théorème de Weierstrass)**

Soit $f \in C([0,1])$. Alors il existe une suite de polynômes $P_N : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ telle que $\|P_N - f\|_\infty \to_{N\to\infty} 0$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la fonction continue et 2-périodique définie sur $[-1,1]$ par $g(x) = f(|x|)$. Par le Théorème de Féjer,il existe$a_{-n}, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ tels que $|g(x) - \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{\pi i k x}| \leq \varepsilon/2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On a $\sum_{l=0}^{m} \frac{(\pi i s)^l}{l!} \to_{m\to\infty} e^{\pi i s}$ uniformément sur tout intervalle borné. Pour tout $k \in \{-n, \dots, n\}$, il existe donc $m(k) \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall x \in [-1,1] : \qquad \left| \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(\pi i k x)^j}{j!} - e^{\pi i k x} \right| \leq \varepsilon/(4n+2)(|a_k|+1).$$

Posons $P(x) := \sum_{k=-n}^{n} a_k \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(\pi i k x)^j}{j!}$. Soit $x \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned}
|P(x) - f(x)| &= |P(x) - g(x)| \\
&\leq \left| P(x) - \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{\pi i k x} \right| + \left| \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{\pi i k x} - g(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=-n}^{n} |a_k| \left| \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(\pi i k x)^j}{j!} - e^{\pi i k x} \right| + \varepsilon/2 \\
&\leq \sum_{k=-n}^{n} \varepsilon/(4n+2) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Théorie L^2 des séries de Fourier

On rappelle que $L^2(\mathbf{S}^1)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall f, g \in L^2(\mathbf{S}^1) : \langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Le lien entre séries de Fourier et ce produit scalaire est l'observation suivante.

Observation

Pour tout $f \in L^2(\mathbf{S}^1)$ et $n \in \mathbf{Z}$, on a : $\boxed{c_n(f) = \langle f | e_n \rangle.}$

La proposition cruciale suivante est une autre conséquence du Théorème de Fejer.

Proposition 14

$\{e_n : n \in \mathbf{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{S}^1)$.

Preuve : $\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm}$ et, par le Théorème de Fejer, $\mathrm{Vect}\{e_n : n \in \mathbf{Z}\}$ est dense dans $L^2(\mathbf{S}^1)$.

Formule de Parseval

Corolllaire **(Formule de Parseval)**

- Pour tout $f \in L^2(\mathbf{S}^1)$, on a $\|f\|_2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|^2$ et $\|S_N(f) - f\|_2 \to_{N\to\infty} 0$.
- Pour tous $f, g \in L^2(\mathbf{S}^1)$, on a $\langle f|g\rangle = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)\overline{c_m(g)}$.

Preuve : Ceci découle immédiatement du fait que $\{e_n : n \in \mathbf{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{S}^1)$ et que $c_n(f) = \langle f|e_n\rangle$.

Séries de Fourier de fonctions C^1

Corollaire (Convergence uniforme des séries de Fourier de fonctions C^1)

Soit $f \in C^1(\mathbf{S}^1)$. Alors $(c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$ est dans $\ell^1(\mathbf{Z})$; en particulier, $\|S_N(f) - f\|_\infty \to_{N \to \infty} 0$.

Preuve : Comme $c_n(f') = inc_n(f)$, on a $|c_n(f)| = |c_n(f')/n|$ pour $n \neq 0$. Or $(c_n(f'))_{n \in \mathbf{Z}}$ est dans $\ell^2(\mathbf{Z})$, car $f' \in C(\mathbf{S}^1) \subset L^2(\mathbf{S}^1)$. Comme $(1/n)_{n \in \mathbf{Z}^*}$ est également dans $\ell^2(\mathbf{Z}^*)$, l'assertion s'en déduit.

Noyau de Poisson

Définition

Fixons un nombre réel $r \in [0, 1[$. Le **noyau de Poisson** P_r est la fonction 2π-périodique définie

$$\forall x \in \mathbf{R} : P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{inx}.$$

On observera que les séries définissant P_r convergent normalement et donc uniformément sur $\mathbf{R}$; en particulier $P_r \in C(\mathbf{S}^1)$.

Quelques propriétés du noyau de Poisson

La proposition suivante montre que $(P_r)_{r\in[0,1[}$ est une unité approchée dans $L^1(\mathbf{S}^1)$.

Proposition 15

(1) $P_r(x) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(2) $P_r(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(3) $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1$;

(4) pour tout $\delta > 0$, on a $\lim_{r\to 1-}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} P_r(t)dt\right) = 0$.

Quelques propriétés du noyau de Poisson : preuves

$$
\begin{aligned}
(1)\ P_r(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{inx} = \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}} + 1 + \frac{re^{ix}}{1 - re^{ix}} \\
&= \frac{(re^{ix} - r^2) + (1 - re^{-ix} - re^{-ix} + r^2) + (re^{ix} - r^2)}{1 - re^{-ix} - re^{ix} + r^2} \\
&= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}.
\end{aligned}
$$

(2) L'assertion découle de (1), du fait que $0 \leq r < 1$ et du fait que $1 - 2r\cos x + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1 - r)^2 \geq 0.$

Quelques propriétés du noyau de Poisson : preuves

(3) En utilisant la convergence uniforme de la série définissant P_r, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\delta_{n,0} = 1.$$

(4) On a $1-2r\cos x + r^2 = (1-r\cos x)^2 + r^2\sin^2 x \geq (1-r\cos x)^2 \geq (1-|\cos x|)^2$; d'où, pour $\delta < |x| \leq \pi$,

$$0 \leq P_r(x) \leq \frac{1-r^2}{(1-|\cos x|)^2} \leq \frac{1-r^2}{(1-|\cos\delta|)^2}$$

et donc $P_r(x) \to_{r\to 1-} 0$, **uniformément** pour $\delta < |x| \leq \pi$. L'assertion en découle.

Approximation de Poisson

Theorème 5 (Théorème de Poisson)

- Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$, on a $\|P_r * f - f\|_p \to_{r \to 1-} 0$;
- Pour tout $f \in C(\mathbf{S}^1)$, on a $\|P_r * f - f\|_\infty \to_{r \to 1-} 0$.

Preuve : Par la Proposition 15, $(P_r)_r$ est une unité approchée de $L^1(\mathbf{S}^1)$; l'assertion découle donc immédiatement de la Proposition 5.

Remarque

Il est clair que P_r appartient à l'adhérence de $\mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Le Théorème 4 implique donc (de nouveau) que $\mathrm{Trig}(\mathbf{S}^1)$ est dense dans $C(\mathbf{S}^1)$. Ceci est d'autant plus remarquable que le noyau de Poisson ainsi que le Théorème 4 sont antérieurs au Théorème de Fejer de 70 ans !

Remarques sur les procédés de sommation de séries

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes, et $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ la N-ième somme partielle.

(1) On dit que $\sum_n u_n$ converge vers S si $\lim_N S_N = S$;

(2) on dit que $\sum_n u_n$ **converge au sens de Cesaro** (ou C-converge) vers S si $\lim_N \dfrac{1}{N+1}(S_0 + \cdots + S_N) = S$;

(3) on dit que $\sum_n u_n$ **converge au sens d'Abel** (ou A-converge) vers S si $\sum_n u_n r^n$ converge pour tout $0 \leq r < 1$ vers un nombre $A(r)$et si $\lim_{r\to 1-} A(r) = S$.

On peut montrer (exercice !) que :

$\sum_n u_n$ converge $\Rightarrow \sum_n u_n$ C-converge $\Rightarrow \sum_n u_n$ A-converge.

Remarques sur les procédés de sommation de séries

Les implications réciproques sont fausses en général :
(1) $\sum_n u_n$ C-converge $\not\Rightarrow \sum_n u_n$ converge ; par exemple, soit $u_n = (-1)^n$. Alors $\sum_n u_n$ ne converge pas, mais $\sum_n u_n$ C-converge vers $1/2$.
(2) $\sum_n u_n$ A-converge $\not\Rightarrow \sum_n u_n$ C-converge : par exemple, soit $u_n = (-1)^n(n+1)$. Alors

$$S_N = \begin{cases} \frac{N}{2}+1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ -\frac{N+1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases}$$

$\sum_n u_n$ n'est pas C-convergente, car $S_0 + \cdots + S_N = 0$ si Nest impair et $S_0 + \cdots + S_N = \frac{N}{2} + 1$ si Nest pair.
Cependant, comme
$\sum_n u_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)r^n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)r^{n-1} = -\frac{1}{(1+r)^2}$,
$\sum_n u_n$ est A-convergente vers $-1/4$.

Sommation de séries de Fourier au sens de Cesaro

Soit $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $S(f)(x) = \sum_n c_n(f)e^{inx}$ sa série de Fourier en $x \in \mathbf{R}$.
On rappelle que $D_N * f(x) = S_N(f)(x)$ et que
$F_N * f(x) = \dfrac{1}{N+1}(D_0 + \cdots + D_N) * f(x))$, de sorte que
$F_N * f(x) = \dfrac{1}{N+1}(S_0(f)(x) + \cdots + S_N f(x))$.
Ainsi $\sum_n c_n(f)e^{inx}$ est C-convergente vers $f(x)$, par le Théorème de Fejer.

Sommation de séries de Fourier au sens d'Abel

Soit $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $0 \leq r < 1$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-t)}$ est normalement convergente, on a

$$\begin{aligned} P_r * f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-t)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \int_{-\pi^\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n(f) e^{inx}. \end{aligned}$$

On voit donc que $\sum_n c_n(f) e^{inx}$ est A-convergente vers $f(x)$, par le Théorème de Poisson.

Séries de Fourier à partir de séries entières

Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$.
Pour tout $0 \leq r < R$, on définit $f_r \in C(\mathbf{S}^1)$ par

$$\forall x \in \mathbf{R} : \boxed{f_r(x) = F(re^{ix}).}$$

Proposition 16

On a $\boxed{c_n(f_r) = \begin{cases} r^n a_n & \text{si} \;\; n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \;\; n < 0 \end{cases}}$

Preuve : Comme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge uniformément sur $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq r\}$, on a

$$\begin{aligned} c_n(f_r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{ix}) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ikx}) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k 2\pi \delta_{kn} \\ &= r^n a_n. \end{aligned}$$

Inégalités de Cauchy par les séries de Fourier

Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$.

Corollaire 1 (Inégalités de Cauchy)

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r < R$, on a

$$\left|F^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z|=r} |F(z)|.$$

Preuve : Pour tout $0 \leq r < R$, soit $f_r \in C(\mathbf{S}^1)$ définie par $f_r(x) = F(re^{ix})$. On a

$$\forall n \in \mathbf{Z} : |c_n(f_r)| \leq \max_{x \in \mathbf{R}} |f_r(x)| = \max_{|z|=r} |F(z)|.$$

Comme $c_n(f_r) = r^n a_n$ par la Proposition 16, il s'ensuit que

$$|a_n| \leq \frac{\max_{|z|=r} |F(z)|}{r^n}.$$

Comme $a_n = \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}$, ceci prouve l'inégalité voulue.

Corollaire 2 (Théorème de Liouville)

Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$. On suppose que F est bornée. Alors F est constante.

Preuve :Pour tout $0 \leq r$, soit $f_r \in C(\mathbf{S}^1)$ définie par $f_r(x) = F(re^{ix})$ Par la Proposition 16, on a, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} |a_n| = \frac{|c_n(f_r)|}{r^n} &\leq \frac{\max_{x \in \mathbf{R}} |f_r(x)|}{r^n} \\ &= \frac{\max_{|z|=r} |F(z)|}{r^n} \\ &\leq \frac{\|F\|_\infty}{r^n}. \end{aligned}$$

Soit $n > 0$. En faisant $r \to +\infty$, on a donc $a_n = 0$.

Principe du maximum par les séries de Fourier

Corollaire 3 (Principe du maximum)

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $U \subset \mathbf{C}$ Supposons que $|f|$ possède un maximum local en $a \in U$; c-à-d qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} = \{z \in \mathbf{C} : |z-a| \leq r\} \subset U$ et tel que $\sup_{z \in \overline{D(a,r)}} |f(z)| = |f(a)|$. Alors f est constante sur U.

Preuve : Posons $F(z) = f(z-a)$. Alors F est développable en série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ et on a $\sup_{|z| \leq r} |F(z)| = |F(0)|$. Soit $f_r \in C(\mathbf{S}^1)$ définie par $f_r(x) = F(re^{ix})$. On a alors

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_r(x)| = \sup_{|z|=r} |F(z)| \leq |F(0)|.$$

Par l'égalité de Parseval-Plancherel, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f_r)|^2 = \|f_r\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_r(x)|^2 dx \\ \leq |F(0)|^2. \end{aligned}$$

Or $|F(0)|^2 = |a_0|^2$ et, par la Proposition 17, on a $c_n(f_r) = a_n r^n$ pour tout $n \geq 0$ et $c_n = 0$ pour $n < 0$. Il s'ensuit que

$\sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n|^2 r^{2n} \leq |a_0|^2$ et donc $a_n = 0$ pour tout $n > 0$. Ainsi F est constante et donc f est constante sur un ouvert de U et,

comme U est connexe, on conclut avec le principe du prolongement analytique.

Le problème de Dirichlet

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert de bord $\partial\Omega$. Soit $g : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ une fonction continue.
Pour une fonction φ, on notera dans la suite $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xy}, \ldots$ ses dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}\varphi, \frac{\partial}{\partial y}\varphi, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varphi, \ldots$.

Problème de Dirichlet

Existe-t-il $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ avec les propriétés suivantes :

- φ est C^2 sur Ω;
- φ est continue sur $\overline{\Omega}$;
- $\varphi = g$ sur $\partial\Omega$;
- φ est harmonique sur Ω, c-à-d $\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ sur Ω ?

Fonctions holomorphes et fonctions harmoniques

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe.

Lemma

Soient $u, v : \ \Omega \to \mathbf{R}$ définis par $u(x,y) = \mathrm{Re} f(z)$ et $v(x,y) = \mathrm{Im} f(z)$ pour $z = x + iy$.

- u et v sont C^∞ sur Ω;
- u et v sont harmoniques sur Ω.

Preuve : Le fait que u et v sont C^∞ est uen conséquence bien connue du fait que f est holomorphe. Par les égalités de Cauchy-Riemann, on a $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$. Il s'ensuit que $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$ et de même $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Corollaire

Soit $\widetilde{u} : \ \Omega \to \mathbf{R}$ définie par $\widetilde{u}(x,y) = \mathrm{Re} f(\overline{z})$ pour $z = x + iy$. Alors $\widetilde{u}$ est C^∞ et harmonique sur Ω;

Preuve : Comme $\widetilde{u}(x,y) = u(x,-y)$, les assertions découlent du Lemme.

Fonctions holomorphes à partir de séries de Fourier

Soit $g : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Posons

$$\forall n \in \mathbf{Z} : a_n = c_n(g)$$

et définissons les séries entières

$$\forall z \in \mathbf{C} : \boxed{f_1(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n} \text{ et } \boxed{f_2(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n.}$$

Fonctions holomorphes à partir de séries de Fourier

Proposition 16

(1) f_1 et f_2 sont des fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

(2) Soit $F : \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \cup \mathbf{S}^1 \to \mathbf{C}$ définie par

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) + f_2(\overline{z}) & \text{pour } \ z \in \mathbf{D} \\ g(z) & \text{pour } \ z \in \mathbf{S^1}. \end{cases}$$

Alors F est continue sur $\overline{\mathbf{D}}$ et $F|_{\mathbf{S}^1} = g$.

(3) Si g est réelle, alors F est réelle.

Fonctions holomorphes à partir de séries de Fourier : preuve

(1) La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}} = (c_n(g))_{n\in\mathbf{Z}}$ étant bornée, les rayons de convergence des séries entières f_1 et f_2 sont ≥ 1.
(2) F est continue sur $\mathbf{D}$, car les séries entières f_1 et f_2 le sont. Il est clair que $F|_{\mathbf{S}^1} = g$.
Pour $0 \leq r < 1$ et $x \in \mathbf{R}$, on a

$$F(re^{ix}) = f_1(z) + f_2(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n e^{inx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n e^{inx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n(g) e^{inx} = P_r * g(e^{ix}),$$

où P_r est le noyau de Poisson. Soit $e^{ix} \in \mathbf{S}^1$ et $r_k e^{ix_k} \in \mathbf{D}$ avec $r_k e^{ix_k} \to_{k\to\infty} e^{ix}$. Comme $P_r * g \to_{r\to 1-} g$ uniformément sur $\mathbf{S}^1$, on a $F(r_k e^{ix_k}) \to_{k\to\infty} g(e^{ix}) = F(e^{ix})$.
(3) On a $F(re^{ix}) = P_r * g(e^{ix}) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) P_r(t) dt$ pour tout r et tout t. Comme $P_r(t) \in \mathbf{R}$, l'assertion s'ensuit.

Solution du problème de Dirichlet pour le disque

Soit $g : \partial \mathbf{D} = \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}$ une fonction continue

Théorème 6 (Problème de Dirichlet)

Soit $\varphi : \overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(r\cos x, r\sin x) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n(g) e^{inx} = P_r * g(x) & 0 \leq r < 1, x \in \mathbf{R} \\ g(e^{ix}) & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

- φ est C^∞ sur $\mathbf{D}$;
- φ est continue sur $\overline{\mathbf{D}}$;
- $\varphi = g$ sur $\partial \mathbf{D}$;
- φ est harmonique sur $\mathbf{D}$.

Solution du problème de Dirichlet pour le disque : preuve

Soient $f_1(z) = \dfrac{c_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g) z^n$, $f_2(z) = \dfrac{c_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(g) z^n$ et $F : \overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{C}$ définie par

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) + f_2(\overline{z}) & \text{pour } \ z \in \mathbf{D} \\ g(z) & \text{pour } \ z \in \mathbf{S}^1. \end{cases}$$

Par la Proposition 16, f_1 et f_1 sont holomorphes sur $\mathbf{D}$, F est continue sur $\overline{\mathbf{D}}$ et $F|_{\mathbf{S}^1} = g$. De plus, F est à valeurs réelles, car g est à valeurs réelles.

Solution du problème de Dirichlet pour le disque : preuve

On a $\varphi(r\cos t, r\sin t) = F(re^{it})$ et $\varphi(\cos t, \sin t) = g(e^{it}) = F(e^{it})$ pour tout $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbf{R}$. On a donc

$$\forall z = x + iy \in \overline{\mathbf{D}} : \qquad \varphi(x, y) = F(z).$$

Il s'ensuit que φ est C^∞ sur $\mathbf{D}$, continue sur $\overline{\mathbf{D}}$ et que $\varphi = g$ sur $\partial\mathbf{D}$. Comme F est à valeurs réelles, on a

$$\forall z = x + iy \in \overline{\mathbf{D}} : \qquad \varphi(x, y) = \mathrm{Re}\varphi(x, y) = \mathrm{Re}F(z) = \mathrm{Re}f_1(z) + \mathrm{Re}f_2(\overline{z}).$$

Par le lemme et son corollaire, $\mathrm{Re}f_1$ et $z\mathrm{Re}f_2(\overline{z})$ sont harmoniques. Donc φ est harmonique.

Equirépartition à la Weyl

Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Comme il est bien connu ("principe des tiroirs de Dirichlet") que la suite $(\{n\theta\})_{n\in\mathbf{N}}$ est dense dans $[0,1]$. (On rappelle que $\{x\} \in [0,1]$ désigne la partie fractionnaire de $x \in \mathbf{R}$.) De manière équivalente, la suite $(e^{2\pi ik\theta})_{k\in\mathbf{N}}$ est dense dans $\mathbf{S}^1$. Nous allons voir que $(\{n\theta\})_{n\in\mathbf{N}}$ possède une propriété beaucoup plus forte.

Definition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres dans $[0,1]$ est **équirépartie** si, pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\frac{1}{n}\mathrm{Card}\,\{k \in \{0,\ldots,n-1\} | u_k \in [a,b]\} \to_{n\to+\infty} b-a$$

Remarque

Soit $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une énumération des nombres rationnels dans $[0,1[$. Soit $u_n = \begin{cases} r_{n/2} & \text{pour } n \text{ pair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$. Alors $(u_n)_n$ est dense dans $[0,1[$ (évident) mais n'est pas équirépartie (car, par exemple, $\frac{1}{n}\mathrm{Card}\,\{k \in \{0,\ldots,n-1\} | u_k \in [0,1/10]\} \geq \frac{n-1}{2n} \to_{n\to\infty} 1/2$.).

Théorème 7 (Théorème d'équirépartition de Weyl)

Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. La suite $(\{n\theta\})_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie dans $[0, 1]$.

La preuve est basée sur le critère suivant d'équidistribution.

Théorème 8 (Critère d'équirépartition de Weyl)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $[0, 1[$. Supposons que

$$\forall k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} : \quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k u_n} \to_{N\to+\infty} 0$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie dans $[0, 1]$.

Déduction du Théorème d'équirépartition de Weyl

Soit $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Alors $e^{2\pi i k\theta} \neq 1$, car θ est irrationnel. On a alors

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k\{n\theta\}} \right| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{2\pi i k\theta})^n \right| \\
&= \left| \frac{1}{N} \frac{1 - e^{2\pi i k N\theta}}{1 - e^{2\pi i k\theta}} \right| \\
&\leq \frac{1}{N} \frac{2}{1 - |e^{2\pi i k\theta}|}
\end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k\{n\theta\}} \to_{N \to +\infty} 0.$

Preuve du Critère d'équirépartition de Weyl

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $[0,1[$. Supposons que

$$\forall k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\} : \quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k u_n} \to_{N\to+\infty} 0$$

Remarquons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie si et seulement si, pour tout intervalle fermé $I \subset [0,1]$, on a

$$(*) \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_I(u_n) \to_{N\to+\infty} \int_0^1 \mathbf{1}_I(t)dt$$

L'idée est de prouver d'abord que

$$(**) \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(u_n) \to_{N\to+\infty} \int_0^1 f(t)dt$$

pour toute $f : [0,1] \to \mathbf{C}$ continue et 1-périodique et d'en déduire $(*)$ par approximation.

Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, soit $G_N : C_{1-\mathrm{per}}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ la forme linéaire définie par

$$G_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(u_n) - \int_0^1 f(t)dt.$$

Comme

$$|G_N(f)| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |f(u_n)| + \int_0^1 |f(t)|dt \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \|f\|_\infty + \|f\|_\infty,$$

G_N est continue de norme $\|G_N\| \leq 2$. Posons $e_k(t) := e^{2\pi ikt}$ pour $k \in \mathbf{Z}$ et $t \in [0,1]$. Il est clair que $G_N(e_0) = 0$. Par hypothèse, on a :

$$\forall k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} : \quad G_N(e_k) \to_{N\to+\infty} 0.$$

Théorème d'équirépartition de Weyl : preuve de $(**)$

De ce qui précède, on a $G_N(f) \to_{N\to+\infty} 0$, pour tout $f \in \mathrm{Trig}([0,1]) = \mathrm{Vect}\{e_k : k \in \mathbf{Z}\}$. Par le Théorème de Fejer, $\mathrm{Trig}([0,1])$ est dense dans $C_{1-\mathrm{per}}(\mathbf{R})$. Comme $(\|G_N\|)_N$ est bornée, il s'ensuit que

$$\forall f \in C_{1-\mathrm{per}}(\mathbf{R}), \quad G_N(f) \to_{N\to+\infty} 0.$$

Ceci démontre $(**)$.

Critère d'équirépartition de Weyl : preuve de $(*)$

Soit $0 \leq a < b \leq 1$. Fixons $\varepsilon > 0$. On peut trouver $f_+, f_- \in C_{1-\mathrm{per}}(\mathbf{R})$ avec les propriétés suivantes :

- $0 \leq f_- \leq 1, 0 \leq f_+ \leq 1$
- $f_- \leq \mathbf{1}_{[a,b]} \leq f_+$.
- $(b-a) - \varepsilon \leq \int_0^1 f_-(t)dt \leq \int_0^1 f_+(t)dt \leq (b-a) + \varepsilon$

On a

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_-(u_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_I(u_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_+(u_n).$$

Il existe N_0 tel que

$$\forall N \geq N_0 : \quad |G_N(f_-)| \leq \varepsilon \text{ et }, |G_N(f_+) \leq \varepsilon.$$

Critère d'équirépartition de Weyl : preuve de $(*)$

On a donc

$$\int_0^1 f_-(t)dt - \varepsilon \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_I(u_n) \leq \int_0^1 f_+(t)dt + \varepsilon$$

et par conséquent

$$(b-a) - 2\varepsilon \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_I(u_n) \leq (b-a) + 2\varepsilon$$

pour tout $N \geq N_0$.

Quelques références bibliographiques sur les séries de Fourier

- T. W. Körner : Fourier Analysis. Cambridge University Press, 1988.
- W. Rudin : Analyse Réelle et Complexe. Masson, 1975.
- E. Stein et R. Shakarchi : Fourier Anaysis, Princeton University Press, 2003
- C. Zuily et H. Queféllec : Analyse pour l'agrégation. Dunod, 2007