LE THÉORÈME D'INVERSION DE FOURIER DU POINT DE VUE DES DISTRIBUTIONS

BACHIR BEKKA

Le théorème d'inversion de Fourier est l'assertion que la transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une bijection de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même, dont l'inverse est donnée par $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$ pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ (pour une normalisation convenable de $\mathcal{F}$). Quand on étend, par dualité, la transformée de Fourier à l'espace des distributions tempérées, ce résultat se réduit tout simplement à la formule $\mathcal{F}(\mathbf{1}) = \delta$. L'objet de cette note est de montrer directement cette dernière formule, en interprétant dans cette optique la preuve du théorème d'inversion donnée dans le Chapitre 7 de W. Rudin : Functional analysis, McGraw-Hill, 1973. Plus précisément, soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitraire avec $\varphi(0) = 1$ et considérons la famille $(\varphi_t)_{t>0}$ définie par $\varphi_t(x) = \varphi(tx)$. Il est immédiat que $\lim_{t\to 0} \varphi_t = \mathbf{1}$ et que $\lim_{t\to 0} \mathcal{F}(\varphi_t) = \lambda\delta$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, avec $\lambda = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi)(0)$. Comme $\mathcal{F}$ est continue, il s'ensuit que $\mathcal{F}(\mathbf{1}) = \lambda\delta$. Il suffit alors de tester ces deux distributions sur une fonction φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi(0) \neq 0$, par exemple une gaussienne, pour conclure que $\lambda = 1$ (pour la normalisation choisie de $\mathcal{F}$).

1. Le théorème d'inversion de Fourier

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}^n$, espace des fonctions indéfiniment dérivables $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ à décroissance rapide (voir Section 3, plus loin). Nous noterons $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot y}dx \qquad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

où $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Remarque : Le choix de cette normalisation de la transformée de Fourier est le seul pour lequel on a $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ pour tous $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour lequel, en même temps, $\mathcal{F}$ est une isométrie pour la norme L^2. Cette normalisation a l'inconvénient de faire apparaître des facteurs 2π pour les transformées de Fourier des dérivées (voir Lemme 4 plus bas) ; pour cette raison, les spécialistes en EDP préfèrent le choix $\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}dx$ (comme dans J-M. Bony : Cours d'analyse, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2006) ou $\mathcal{F}(f)(y) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}dx$ (comme dans M. Reed et B. Simon : Functional analysis I, Academic Press, 1980 et dans W. Rudin : Functional analysis, McGraw-Hill, 1973)

Théorème 1. ***(Théorème d'inversion de Fourier)*** *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$, c-à-d*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(y)e^{2\pi i x\cdot y}dy \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ceci signifie encore que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une bijection linéaire d'inverse donné par $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$.

Date: 26 octobre 2013.

Remarque : Une des conséquences les plus importantes de ce résultat est le **Théorème de Plancherel :** Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(x)|^2 dx$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ s'étend en une isométrie bijective $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

Rappelons en brièvement la preuve : le théorème de Fubini montre que l'opérateur adjoint de $\mathcal{F}$, défini sur l'espace préhilbertien $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme L^2, est donné par $\mathcal{F}^*(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$. Donc, $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ par le théorème d'inversion de Fourier, c-à-d $\mathcal{F}$ est un opérateur unitaire. On observera que, réciproquement, si $\mathcal{F}$ est unitaire, alors $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$. Le théorème de Plancherel est donc équivalent au théorème d'inversion .

L'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est muni d'une famille de semi-normes et d'une distance associée (voir Section 3). On rappelle qu'une distribution tempérée T est une forme linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ qui est continue. On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des distributions tempérées et on le munit de la topologie de la convergence simple : une suite $(T_n)_n$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tend vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si $\lim_n \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ à croissante modérée, c-à-d pour laquelle il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C(1 + \|x\|)^k$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Une telle fonction définit une distribution tempérée $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Nous préfèrerons noter tout simplement par f la distribution T_f. En particulier, la distribution associée à la fonction constante $\mathbf{1}$ est donnée par $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx$

On définit la transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pour les distributions tempérées par la formule

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle \qquad \text{pour tous} \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Remarques (i) Comme $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue (Corollaire 5), $\mathcal{F}(T) = T \circ \mathcal{F}$ est bien une distribution tempérée, pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
(ii) La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est bien une extension de $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En effet, soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, le théorème de Fubini montre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}(\varphi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(x)\varphi(x)dx$$

et ceci signifie que la distribution $\mathcal{F}(T_f)$ coïncide avec la distribution $T_{\mathcal{F}(f)}$ associée à $\mathcal{F}(f)$.
(iii) Soit $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ la mesure de Dirac en 0. Comme

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \mathcal{F}f(0) = \langle \delta, \mathcal{F}f\rangle \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

on a

$$\boxed{F(\delta) = \mathbf{1}}$$

. Plus généralement, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il est immédiat que $F(\delta_a) = e_a$, où e_a désigne l'exponentielle $e_a(x) = e^{-2\pi i a \cdot x}$.

(iv) Le fait que $\mathcal{F}(\delta_a) = e_a$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ peut s'interpréter ainsi : $\mathcal{F}$ est un changement de "base" permettant de diagonaliser simultanément tous les opérateurs de translation $\tau_a : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, définis par $\tau_a(f)(x) = f(x - a)$; en effet (voir Lemme 3), on a $\mathcal{F}(\tau_a(f))(x) = e_a(x)\mathcal{F}(f)(x)$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Le théorème d'inversion de Fourier (Théorème 1) est équivalent à l'assertion suivante.

Théorème 2. ***(Théorème d'inversion de Fourier : version distributions)*** *On a :*

$$\boxed{\mathcal{F}(\mathbf{1}) = \delta}$$

Déduisons le Théorème 1 du Théorème 2 : en effet l'égalité $\mathcal{F}(\mathbf{1}) = \delta$ signifie que $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(y)dy = f(0)$, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Alors, en appliquant cette formule à $\tau_a(f)$, la translatée de f par $-a$, on obtient $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\tau_a(f))(y)dy = \tau_a(f)(0)$. Comme, d'une part, $\tau_a(f)(0) = f(-a)$ et, d'autre part (Lemme 3), $\mathcal{F}(\tau_a(f))(y) = e^{-2\pi i y.a}\mathcal{F}f(y)$, on a bien $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(a) = f(-a)$.

Réciproquement, le Théorème 2 se déduit immédiatement du Théorème 1 :

$$\langle \mathcal{F}(\mathbf{1}), f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(y)dy = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(0) = f(0) = \langle \delta, f\rangle.$$

2. Quelques rappels sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et sa topologie

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < +\infty,$$

où $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ et $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$ pour des multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ dans $\mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

On notera que, pour une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $D^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $P\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et toute fonction polynômiale $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. On notera également que toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|dx \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^k |\varphi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|)^{-k} dy < \infty,$$

où $k \in \mathbb{N}$ est tel que $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|)^{-k} dy < \infty$ et $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on définit une famille dénombrable de semi-normes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

On considère la suite filtrante de semi-normes (en fait, de normes) associée

$$\|\varphi\|_N = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq N} \|\varphi\|_{\alpha,\beta},$$

ainsi que la distance sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$d(\varphi, \psi) = \sum_N 2^{-N} \frac{\|\varphi - \psi\|_N}{1 + \|\varphi - \psi\|_N}.$$

Pour cette distance, un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les ensembles de la forme

$$U_{\varepsilon,N} = \{\varphi \ : \ \|\varphi\|_N < \varepsilon\} = \bigcap_{|\alpha|,|\beta|\leq N} \{\varphi \ : \ \|\varphi\|_{\alpha,\beta} < \varepsilon\}.$$

Une application linéaire $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue si et seulement si, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\Phi(f)\|_{\alpha,\beta} \leq C\|f\|_M \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

On rappelle qu'une forme linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ est continue (c-à-d qu'elle définit une distribution tempérée) si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}$, et $C > 0$ tels que

$$|\langle T, f\rangle| \leq C\|f\|_N \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

3. Quelques propriétés basiques de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, on définit $\tau_a(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ et $h_t(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ par

$$\tau_a(f)(x) = f(x-a), \qquad h_t(f) = f(tx) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Les formules suivantes se vérifient immédiatement, par un changement de variable.

Lemme 3. *Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$:*
- $\mathcal{F}(\tau_a(f))(y) = e^{-2\pi i y.a}\mathcal{F}f(y)$;
- $\mathcal{F}(h_t(f)) = t^{-n}h_{1/t}(\mathcal{F}f)$.

Pour un polynôme $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ on pose

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{a_\alpha}{(2\pi i)^{|\alpha|}} D^\alpha, \qquad P(-D) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{(-1)^{|\alpha|}a_\alpha}{(2\pi i)^{|\alpha|}} D^\alpha.$$

Les formules suivantes se vérifient immédiatement, en utilisant des intégrations par parties et la règle de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Lemme 4. *Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$. On a, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$,*
- $\mathcal{F}(P(D)f) = P(\mathcal{F}f)$;
- $\mathcal{F}(Pf) = P(-D)(\mathcal{F}f)$.

Corollaire 5.
- *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;*
- *la transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur continu.*

Preuve Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, on a, en utilisant les formules du Lemme 4,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(f)\|_{\alpha,\beta} &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |y^\alpha D^\beta \mathcal{F}(f)(y)| = (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}\left(D^\alpha(x^\beta f(x))\right)(y)| \\
&\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(x^\beta f(x))| dx \\
&\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^k |D^\alpha(x^\beta f(x))| \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|y\|)^{-k} dy \\
&\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} C\|f\|_{|\alpha|+k},
\end{aligned}$$

où $k \in \mathbb{N}$ est tel que $C := \int_{\mathbb{R}^n}(1+\|y\|)^{-k}dy < \infty$. Les deux assertions du corollaire en découlent. ■

4. Preuve du Théorème 2

Fixons une fonction φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi(0) = 1$. On considère la famille $(\varphi_t)_{t>0}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\varphi_t(x) = h_t(\varphi)(x) = \varphi(tx)$. Par le Lemme 3, la transformée de Fourier de φ_t est donnée par $\mathcal{F}(\varphi_t)(y) = t^{-n}\mathcal{F}(\varphi)(y/t)$.

La proposition suivante est l'étape essentielle dans la preuve du Théorème 2.

Proposition 6. *On pose* $\lambda = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi)(0)$. *On a*

$$\lim_{t\to 0} \varphi_t = \mathbf{1} \qquad et \qquad \lim_{t\to 0} \mathcal{F}(\varphi_t) = \lambda\delta,$$

au sens de la topologie de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve On a $\lim_{t\to 0} \varphi_t(x) = \lim_{t\to 0} \varphi(tx) = \varphi(0) = 1$ ainsi que $|\varphi_t(x)| \leq \|\varphi\|_\infty$ pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre alors que $\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x) f(x)dx = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et ceci prouve que $\lim_{t\to 0} \varphi_t = \mathbf{1}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(\varphi_t), f\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}\mathcal{F}(\varphi)(y/t)f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(y)f(ty)dy.\end{aligned}$$

De nouveau, comme $\lim_{t\to 0} f(ty) = f(0)$ et $|f(ty)| \leq \|f\|_\infty$ pour tous $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}^n$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que

$$\lim_{t\to 0} \langle \mathcal{F}(\varphi_t), f\rangle = f(0) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(y)dy = f(0)\mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi)(0)$$

et ceci prouve que $\lim_{t\to 0} \mathcal{F}(\varphi_t) = \lambda\delta$.■

Pour conclure la preuve du Théorème 2, on considère la gaussienne $\gamma(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$. Il est bien connu que $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathcal{F}(\gamma) = \gamma$. En particulier, on a $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\gamma)(0) = \gamma(0) = 1$. En prenant $\varphi = \gamma$ dans la Proposition 6, on voit que $\lambda = 1$. La continuité de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (voir Corollaire 5) implique alors qu'on a bien $\mathcal{F}(\mathbf{1}) = \delta$.