Université de Rennes 1- Année 2016/2017-Licence 3

GEIS -Géométrie et Isométries

Corrigé de l'examen 1ère session du 5 Janvier 2017

Questions de cours. (5P.) (i) Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie, $f : E \to E$ une isométrie vectorielle et F un sous-espace vectoriel de E tel que $f(F) = F$. Montrer que $f(F^\perp) = F^\perp$.

Soient $x \in F^\perp$ et $y \in F$; comme $f \in O(E)$ et $f^{-1}(y) \in F$ on a : $\langle f(x)|y\rangle = \langle f(x))|f(f^{-1}(y))\rangle = \langle x|f^{-1}(y)\rangle = 0$. Ainsi, $f(F^\perp) \subset F^\perp$; comme f est une bijection linéaire, on a $\dim f(F^\perp) = \dim F^\perp$ et il s'ensuit que $f(F^\perp) = F^\perp$.

(ii) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{E}$. Quand dit-on que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$?

$\mathcal{F}$ est un sous-espace affine s'il existe un sous-espace vectoriel F de E et un point $A \in \mathcal{F}$ tel que $\{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\} = F$.

(iii) Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine telle que $E = \mathrm{K}er(\overrightarrow{f} - Id_E) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - Id_E)$. Enoncer le théorème de décomposition canonique de f.

Il existe une unique application affine $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et un unique vecteur $v \in E$ avec les propriétés : $f = t_v \circ g$, g possède un point fixe et $v \in \mathrm{K}er(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)$.

(iv) Ecrire le tableau de toutes les isométries affines d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

$\det(\overrightarrow{f})$	$\mathrm{Fix}(f)$	Nature de f
1	$\mathcal{P}$	$\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$
1	point A	rotation de centre A
1	$\emptyset$	translation $t_v, v \neq 0$
-1	droite $\mathcal{D}$	réflexion orthogonale autour de $\mathcal{D}$
-1	$\emptyset$	réflexion orthogonale glissée

Exercice 1. (4P.) Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 1 et de direction E.

(i) Déterminer $O(E)$.

Soit u un vecteur unitaire de E. Comme $\dim E = 1$, $\{u\}$ est une base orthonormée de E. Soit $\varphi \in O(E)$; alors $\varphi(u)$ est un vecteur unitaire et donc $\varphi(u) = u$ ou $\varphi(u) = -u$; d'où $\varphi = \mathrm{Id}_E$ ou $\varphi = -\mathrm{Id}_E$. Comme on a toujours $\{\pm\mathrm{Id}_E\} \subset O(E)$, on a donc $O(E) = \{\pm\mathrm{Id}_E\}$.

(ii) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie directe. Montrer que f est une translation.

Par (i), on a $\overrightarrow{f} = \pm\mathrm{Id}_E$. Comme, par hypothèse, $\overrightarrow{f} \in O^+(E)$, on a $\det \overrightarrow{f} = 1$, c-à-d $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_E$. Par un résultat du cours, f est donc une translation.

(iii) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie indirecte. Montrer que f possède un point fixe $A \in \mathcal{E}$ et que f est la symétrie centrale de centre A.

Par (i), on a $\overrightarrow{f} = \pm\mathrm{Id}_E$. Comme, par hypothèse, $\overrightarrow{f} \in O^-(E)$, on a $\det \overrightarrow{f} = -1$, c-à-d $\overrightarrow{f} = -\mathrm{Id}_E$; en particulier, 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$. Par un résultat du cours, f possède donc un unique point fixe $A \in \mathcal{E}$. Alors $f(A + v) = f(A) + \overrightarrow{f}(v) = A - v$ pour tout $v \in E$ et ceci signifie que f est la symétrie centrale de centre A.

Exercice 2. (6P.) Soit $\mathcal{E} = \mathbf{R}^3$ muni du repère orthonormé canonique $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$. On considère l'application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x + y - 2z - 2 \\ -2x + 2y - z - 1 \\ x + 2y + 2z + 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que f est une isométrie.

L'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est donnée dans la base (e_1, e_2, e_3) par la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que A est une matrice orthogonale, c-à-d $A^t A = I_3$.

(ii) Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'application linéaire $\overrightarrow{f}$.

Tout d'abord, on vérifie que $\det A = 1$; donc $\overrightarrow{f}$ est une isométrie directe.

L'espace $\mathrm{Inv}\overrightarrow{f}$ des vecteurs invariants de $\overrightarrow{f}$ est l'ensemble des solutions $v = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ de l'équation $\overrightarrow{f}(v) = v$, c-à-d du système homogène

$$\begin{aligned} -x + y - 2z &= 0 \\ -2x - y - z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

dont les solutions sont les multiples de $u = (1, -1, -1)$. Donc $\overrightarrow{f}$ est une **rotation** autour de l'axe $D = \mathbf{R}u$ L'angle θ de cette rotation est donné par $2\cos\theta + 1 = \mathrm{trace}(A) = 2$, c-à-d $\cos\theta = 1/2$ et donc $\theta = \pm\pi/3$.

(iii) Déterminer l'ensemble des points fixes de f et en déduire la nature géométrique et les éléments caractéristiques de f.

L'espace $\mathrm{Fix}(f)$ des points fixes de f est l'ensemble des solutions $M = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ de l'équation $f(M) = M$, c-à-d du système inhomogène

$$\begin{aligned} -x + y - 2z &= 2 \\ -2x - y - z &= 1 \\ x + 2y - z &= -5 \end{aligned} \quad ;$$

en ajoutant la 3e équation à la 1ère et en ajoutant 2 fois la 3e à la 2e, on obtient $3y - 3z = -3$ et $3y - 3z = -9$. Il n'y a donc pas de solution à ce système : $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$. Il s'ensuit que f est un **vissage.** L'axe de ce vissage est l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{Mf(M)} || u$ c-à-d tels que

$$\begin{pmatrix} -x + y - 2z - 2 \\ -2x - y - z - 1 \\ x + 2y - z + 5 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ceci équivaut au système

$$\begin{aligned} -x + y - 2z - 2 &= 2x + y + z + 1 \\ x + 2y - z + 5 &= -2x - y - z - 1 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 3x - 3z &= 3 \\ 3x + 3y &= -6 \end{aligned}$$

dont les solutions sont $\mathcal{D} = (0, -2, -1) + \mathbf{R}u$ qui est donc l'axe du vissage. E posant $A = (0, -2, -1)$, le vecteur de translation du vissage est $\overrightarrow{Af(A)} = \frac{-2}{3}(1, -1, -1)$.

Exercice 3. (9P.) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, de direction E de dimension finie. (On rappelle que la distance $d(M, N)$ de deux points $M, N \in \mathcal{E}$ est définie par $d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$.)

Une bijection affine $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est appelée *similitude* s'il existe un réel $\lambda > 0$, appelé *rapport de* s, tel que, pour tous points $M, N \in \mathcal{E}$, on a $d(s(M), s(N)) = \lambda d(M, N)$

(i) Soit $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une similitude de rapport $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout $u \in E$, on a $\|\overrightarrow{s}(u)\| = \lambda\|u\|$.

Soient $u \in E$ et $M \in \mathcal{E}$ quelconque ; soit $N \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MN} = u$; alors, comme s est affine, on a $\overrightarrow{s(M)s(N)} = \overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN})$ et donc $\|\overrightarrow{s}(u)\| = \|\overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{s(M)s(N)}\| = d(s(M), s(N)) = \lambda d(M, N) = \lambda\|\overrightarrow{MN}\| = \lambda\|u\|$.

(ii) Soit $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine ; on suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $u \in E$, on a $\|\overrightarrow{s}(u)\| = \lambda\|u\|$. Montrer que s est similitude de rapport λ.

Soient $M, N \in \mathcal{E}$ et posons $u = \overrightarrow{MN}$. Comme s est affine, on a $\overrightarrow{s(M)s(N)} = \overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN})$ et donc $d(s(M), s(N)) = \|\overrightarrow{s(M)s(N)}\| = \|\overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{s}(u)\| = \lambda\|u\| = \lambda\|\overrightarrow{MN}\| = d(M, N)$; ceci montre que s est une similitude de rapport λ.

(iii) Soit $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une similitude de rapport $\lambda > 0$. Montrer qu'il existe une unique isométrie vectorielle f de E telle que $\overrightarrow{s} = h_\lambda \circ f$, où h_λ est l'homothétie vectorielle de rapport λ.

On pose $f := h_\lambda^{-1} \circ \overrightarrow{s} = h_{1/\lambda} \circ \overrightarrow{s}$; alors f est une bijection linéaire (comme composée de telles bijections) et on a $\overrightarrow{s} = h_\lambda \circ f$. Pour tout $u \in E$, on a, par (i), $\|f(u)\| = \|h_{1/\lambda}(\overrightarrow{s}(u))\| = \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{s}(u)\| = \frac{1}{\lambda}\lambda\|u\| = \|u\|$. Ceci montre que f est une isométrie.

(iv) Montrer que l'ensemble $\mathrm{S}im(\mathcal{E})$ de toutes les similitudes de $\mathcal{E}$ (de tous les rapports possibles) est un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathcal{E})$.

Tout d'abord, on a $\mathrm{S}im(\mathcal{E}) \neq \emptyset$ car $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \in \mathrm{S}im(\mathcal{E})$. Soit $s \in \mathrm{S}im(\mathcal{E})$, de rapport λ. Alors (cours) $\overrightarrow{s^{-1}} = \overrightarrow{s}^{-1}$. En appliquant (i), on a donc pour tout $u \in E$: $\|u\| = \|\overrightarrow{s}(\overrightarrow{s}^{-1}(u))\|\|\overrightarrow{s}(\overrightarrow{s^{-1}}(u))\| = \lambda\|\overrightarrow{s^{-1}}(u))\|$ et ceci montre que s^{-1} est une similitude de rapport $1/\lambda$.

Soient $s_1, s_2 \in \mathrm{S}im(\mathcal{E})$, de rapports λ_1 et λ_2. Alors (cours) $\overrightarrow{s_1 \circ s_2} = \overrightarrow{s_1} \circ \overrightarrow{s_2}$; en appliquant (i), on a donc pour tout $u \in E$: $\|\overrightarrow{s_1 \circ s_2}(u)\| = \|\overrightarrow{s_1} \circ \overrightarrow{s_2}(u)\| = \|\overrightarrow{s_1}(\overrightarrow{s_2}(u))\| = \lambda_1\|\overrightarrow{s_2}(u)\| = \lambda_1\lambda_2\|u\|$ et ceci montre que $s_1 \circ s_2$ est une similitude de rapport $\lambda_1\lambda_2$.

(v) Soit $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une similitude qui n'est *pas* une isométrie. Montrer que s possède un unique point fixe dans $\mathcal{E}$. (Indication : on pourra montrer que 1 n'est pas une valeur propre de $\overrightarrow{s}$.)

Supposons, par l'absurde, que 1 est une valeur propre de $\overrightarrow{s}$. Il existe alors $u \in E, u \neq 0$ tel que $\overrightarrow{s}(u) = u$. En utilisant (i), on a donc $\|u\| = \|\overrightarrow{s}(u)\| = \lambda\|u\|$; comme $u \neq 0$, ceci implique que $\lambda = 1$. Mais alors, $\overrightarrow{s}$ et donc s est une isométrie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, 1 n'est pas une valeur propre de $\overrightarrow{s}$. Par un résultat du cours, s possède un unique point fixe.

(vi) Montrer que tout similitude s de $\mathcal{E}$ est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Si s est une isométrie, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que s n'est pas une isométrie. Par (v), s possède un unique point fixe A. Soit $h = h_{A,\lambda}$ l'homothétie affine de centre A et de rapport $1/\lambda$ et posons $g = h^{-1} \circ s$. Alors $s = h \circ g$. Comme $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{h}^{-1} \circ \overrightarrow{s}$, on a $\|g(u)\| = \frac{1}{\lambda}\|\overrightarrow{s}(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in E$; donc g est une isométrie.

(vii) On suppose que $\dim \mathcal{E} = 2$ et que $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une similitude avec $\det(\overrightarrow{s}) > 0$. Montrer que s préserve les angles orientés de vecteurs : pour tous vecteurs unitaires $u, v \in E$, on a $(\widehat{\overrightarrow{s}(u), \overrightarrow{s}(v)}) = (\widehat{u, v})$.

Par (iii), on a $\overrightarrow{s} = h_\lambda \circ f$ pour une isométrie vectorielle f et une homothétie vectorielle de rapport λ. Comme $\det(\overrightarrow{s}) > 0$, on a $\det(f) > 0$, c-à-d $f \in O^+(E)$. Soit r l'unique élement de $O^+(E)$ tel que $v = r(u)$. Comme h_λ commute avec toute application linéaire et comme $O^+(E)$ est commutatif, on a : $r(\overrightarrow{s}(u)) = r(h_\lambda \circ f(u)) = (r \circ h_\lambda \circ f)(u) = (h_\lambda \circ f \circ r)(u) = \lambda f(r(u)) = \lambda f(v) = (h_\lambda \circ f)(v) = \overrightarrow{s}(v)$. Donc $v = r(u)$ et $\overrightarrow{s}(v) = r(\overrightarrow{s}(u))$ et ceci montre que $(\widehat{\overrightarrow{s}(u), \overrightarrow{s}(v)}) = (\widehat{u, v})$.