Université de Rennes 1
Année 2016/2017

Licence 3

Géométrie et isométries – CC1 du 14/10/2016

Exercice 1. (8P.) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que $f \in O(E)$.

Par un résultat du cours, il suffit de vérifier que A est une matrice orthogonale ; c'est le cas car

$$A^tA = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = I_3.$$

(ii) Identifier la nature de f en précisant ses éléments caractéristiques.

L'ensemble $\mathrm{Inv}(A)$ des points fixes de A est l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ qui sont vérifient l'équation $AX = X$, c-à-d

$$\begin{aligned} -x + y + \sqrt{6}z &= 0 \\ x - y - \sqrt{6}z &= 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

dont l'ensemble des solutions est $\mathbf{R}X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent, A est une rotation d'axe $D = \mathbf{R}X_0$, orienté par X_0. Soit θ l'angle de rotation de $A|_{D^\perp}$. Alors $1+2\cos\theta = \mathrm{trace}(A) = 2$ et donc $\cos\theta = 1/2$, c-à-d $\theta = \pm\pi/3(\mathrm{mod} 2\pi)$. Pour déterminer le signe, on calcule le signe de $\det(X, AX, X_0)$ avec (par exemple) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 1 \\ 0 & 3/4 & -1 \\ 0 & \sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{6}/4 > 0$$

et donc $\theta = \pi/3(\mathrm{mod} 2\pi)$. Conclusion f est une rotation d'axe $\mathbf{R}v_0$ et d'angle $\pi/3$ avec $v_0 \in E$ de vecteur composante X_0 dans la base $\mathcal{B}$.

(iii) Identifier la nature de l'isométrie $g \in O(E)$ de matrice $-A$ dans $\mathcal{B}$.

On a $\mathrm{Inv}(-A) = \{X \in \mathbf{R}^3 | -AX = X\} = \{X \in \mathbf{R}^3 | AX = -X\} = \{0\}$. Donc $-A$ (ou g) est une anti-rotation, d'axe D et d'angle $\pi/3$.

Exercice 2. (14P.) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n et soit $f \in O(E)$.

(i) Soit λ une valeur propre réelle de f (on rappelle que ceci signifie que $\mathrm{K}er(f-\lambda\mathrm{Id}_E)\neq\{0\}$). Montrer que $\lambda=1$ ou $\lambda=-1$.

Soit $v\neq 0$ tel que $f(v)=\lambda v$; alors, d'une part, on a $\|f(v)\|=\|\lambda v\|=|\lambda|\|v\|$; d'autre part, comme f est une isométrie, on a $\|f(v)\|=\|v\|$. D'où $|\lambda|\|v\|=\|v\|$ et, comme $v\neq 0$, $|\lambda|=1$ et donc $\lambda=\pm1$, car $\lambda\in\mathbf{R}$.

On pose $\mathrm{Cent}(f)=\{g\in O(E)|\ f\circ g=g\circ f\}$.

(ii) Montrer que $\mathrm{Cent}(f)$ est un sous-groupe de $O(E)$.

Comme $f\circ\mathrm{Id}_E=f=\mathrm{Id}_E\circ f$, on a $\mathrm{Id}_E\in\mathrm{Cent}(f)$ et donc $\mathrm{Cent}(f)\neq\emptyset$.

Soit $g\in\mathrm{Cent}(f)$. Alors $f\circ g=g\circ f$ et donc $g^{-1}\circ(\ f\circ g)\circ g^{-1}=g^{-1}\circ(\ g\circ f)\circ g^{-1}$, c-à-d $g^{-1}\circ f=f\circ g^{-1}$ et donc $g^{-1}\in\mathrm{Cent}(f)$.

Soient $g,h\in\mathrm{Cent}(f)$. Alors $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h=(g\circ f)\circ h=g\circ(f\circ h)=g\circ(h\circ f)=(g\circ h)\circ f$ et donc $g\circ h\in\mathrm{Cent}(f)$. En conclusion, $\mathrm{Cent}(f)$ est un sous-groupe de $O(E)$.

(iii) Soient λ une valeur propre de f et $E_\lambda=\mathrm{K}er(f-\lambda\mathrm{Id}_E)$ l'espace propre correspondant. Montrer que $g(E_\lambda)=E_\lambda$ pour tout $g\in\mathrm{Cent}(f)$.

Soit $v\in E_\lambda$; alors $f(g(v))=f\circ g(v)=g\circ f(v)=g(f(v))=g(\lambda v)=\lambda g(v)$ et donc $g(v)\in E_\lambda$. Ceci montre que $g(E_\lambda)\subset E_\lambda$. Comme g est une bijection linéaire, on a $\dim g(E_\lambda)=\dim E_\lambda$ et donc $g(E_\lambda)=E_\lambda$.

A partir de maintenant, on suppose que $n=3$ et que f est une rotation vectorielle d'axe $D=\mathbf{R}v$, où v est un vecteur unitaire. Soit $g\in\mathrm{Cent}(f)$.

(iv) Montrer que l'on a soit $g(v)=v$ soit $g(v)=-v$.

Par hypothèse, D est l'espace propre $E_1=\mathrm{K}er(f-I_3)$. Par (iii), $g(v)\in E_1$ et donc $g(v)=\lambda v$ pour un $\lambda\in\mathbf{R}$. Ainsi, v est un vecteur propre de g. Le point (i), appliqué à g, montre alors que $\lambda=\pm1$, c-à-d $g(v)=\pm v$.

(v) Décrire la nature de l'isométrie g dans le cas $g(v)=v$.

On a $D=\mathrm{Inv}(f)\subset\mathrm{Inv}(g)$.

1e cas : $\dim\mathrm{Inv}(g)=1$; alors $D=\mathrm{Inv}(g)$ et donc g est une rotation d'axe D. Réciproquement, toute rotation g d'axe D (qui est l'axe de f) commute avec f.

2e cas : $\dim\mathrm{Inv}(g)=2$; alors g est une réflexion orthogonale autour d'un plan contenant D. Par conséquent, $g|_{D\perp}$ est une réflexion plane autour d'une droite. Mais, comme $g|_{D\perp}\circ f|_{D\perp}=f|_{D\perp}\circ g|_{D\perp}$ et comme $f|_{D\perp}$ est une rotation, il s'ensuit que $f|_{D\perp}=-\mathrm{Id}_{D\perp}$ (ce qui signifie que f est un retournement d'axe D). En conclusion : si f n'est pas un retournement, il n'existe pas de $g\in\mathrm{Cent}(f)$ avec $g(v)=v$ et $\dim\mathrm{Inv}(g)=2$; réciproquement, si f est un retournement d'axe D, alors $g\in\mathrm{Cent}(f)$ pour toute réflexion orthogonale autour d'un plan contenant D.

3e cas : $\dim\mathrm{Inv}(g)=3$; alors $g=\mathrm{Id}_E$, qui est bien dans $\mathrm{Cent}(f)$.

(vi) Décrire la nature de l'isométrie g dans le cas $g(v)=-v$.

On a $\dim\mathrm{Inv}(g)\in\{0,1,2\}$.

1e cas : $\dim\mathrm{Inv}(g)=0$; alors $g|_{D^\perp}\in O(D^\perp)$ est une rotation et donc g est une anti-refléxion d'axe D. Réciproquement, $g\in\mathrm{Cent}(f)$, pour toute anti-refléxion g d'axe D.

2e cas : $\dim\mathrm{Inv}(g)=1$; alors g est un retournement d'axe $\Delta=\mathbf{R}w\subset D^\perp$. Mais alors $f(w)=-w$ et donc f est un retournement d'axe Δ. Réciproquement, si f est un retournement, alors $g\in\mathrm{Cent}(f)$, pour tout retournement g d'axe contenu dans $D^\perp$.

3e cas : $\dim\mathrm{Inv}(g)=2$; alors g est une réflexion autour du plan $D^\perp$. Réciproquement, si g est une réflexion autour du plan $D^\perp$, alors $g|_{D^\perp}=\mathrm{Id}_{D^\perp}$, et il s'ensuit que $g\in\mathrm{Cent}(f)$.